

DIESES HEFT
IST PROFESSOR MEISSNER ZUM 70. GEBURTSTAG
VON SCHÜLERN UND FREUNDEN GEWIDMET

Walther Meißner 70 Jahre.

Viele Freunde und Bekannte von W. MEISSNER werden die Zahl 7 in der Überschrift für einen Druckfehler halten, so frisch und tatenfroh tritt MEISSNER in das 8. Jahrzehnt seines Lebens ein. Der Tag bedeutet für ihn auch nicht den Rückzug zum otium cum dignitate, sondern die Möglichkeit, nun frei von der Beanspruchung seines Lehramts sich ganz der Forschung in dem von ihm weiterhin geleiteten Tieftemperaturinstitut der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu widmen. So sind auch die folgenden Daten nur die Rückschau von einer Zwischenstation eines selten erfolgreichen Lebenslaufs. WALTHER MEISSNER ist 1882 in Berlin als Sohn des Oberingenieurs WALDEMAR MEISSNER und seiner Frau JOHANNA geb. GREGER geboren. Nach der Reifeprüfung (1901) wandte er sich an der Technischen Hochschule Charlottenburg dem Studium des Maschineningenieurfachs zu, für das er die Vorprüfung ablegte. Wie so mancher spätere Physiker wurde er während des Studiums von der Physikvorlesung so erfaßt, daß er sich ganz dieser Wissenschaft widmete und an die Universität Berlin übergang, wo er als einer der ausgesuchten wenigen Schüler MAX PLANCKS 1911 mit einer Arbeit über die Theorie des Strahlungsdrucks promovierte. Im nächsten Jahr schon trat er als „wissenschaftlicher Hilfsarbeiter“ in die Physikalisch-Technische Reichsanstalt, und zwar in das Labor für Pyrometrie ein. 1913 löste er die hohen durch die tiefen Temperaturen ab, als er im Forschungslabor mit dem Bau der Wasserstoffverflüssigungsanlage begann. Hier waren ihm seine maschinentechnischen Kenntnisse von großem Nutzen. So entstand aus kleinen Anfängen das berühmte Kältelabor der PTR, dessen Leitung er als Oberregierungsrat bis 1934 innehatte. Eine gewaltige Anzahl von Arbeiten stammt aus dieser Zeit. Insbesondere entdeckte er mit seinem Mitarbeiter OCHSENFELD den zweiten grundlegenden Effekt der Supraleitung: das Herausdrängen eines Magnetfelds aus dem Supraleiter. Da die magnetischen Messungen im Gegensatz zur Leitfähigkeitsmessung auch an Pulvern vorgenommen werden können, wird dieser Effekt heute viel mehr als das Verschwinden des Widerstands als Kriterium der Supraleitung benützt. Als 1934 die Verhältnisse an der PTR unter der politisch verseuchten Leitung alles andere als erfreulich waren, nahm MEISSNER einen Ruf an die T. H. München als Leiter des berühmten von v. LINDE gegründeten Labors für Technische Physik an. Dieses Labor hat er in den Jahren 1934 bis 1952 zu einem der vielseitigsten Institute, fast zu einer Reichsanstalt im Kleinen ausgebaut und es gibt

kaum ein Gebiet der Physik, auf dem keine Arbeiten aus dem Institut hervorgingen. Aber sein ureigenstes Forschungsgebiet ließ er nicht brachliegen. Es wäre für die damaligen Verhältnisse unerschwinglich gewesen, ein klassisches Kältelabor mit den Stufen N_2-H_2-He zu bauen. Deshalb konstruierte MEISSNER die KAPITZA-Maschine, die keinen Wasserstoff braucht, gründlich nach eigenen Ideen um und baute 2 Stück davon. Diese Maschinen bildeten den Grundstock des vom Amt für Wirtschaftsausbau getragenen Kälteinstituts Herrsching, das nach dem Zusammenbruch von der Bayerischen Akademie der Wissenschaften übernommen wurde. In den ersten Jahren nach dem Zusammenbruch leistete MEISSNER fast Übermenschliches. Da er einer der wenigen unbelasteten Professoren war, lag auf ihm die schwere Last, all die wissenschaftlichen Einrichtungen erst einmal organisatorisch wieder aufzubauen. So war er 1946 gleichzeitig Direktor der beiden physikalischen Institute der Technischen Hochschule, Leiter des Bayerischen staatlichen Prüfamts für technische Physik, Leiter des Kälteinstituts Herrsching, Präsident der Bayerischen Akademie der Wissenschaften und als rechte Hand von ZENNECK Vorstandsmitglied des Deutschen Museums. Ihm oblag es, die bestehenden Lücken durch neue Kräfte auszufüllen und dabei noch den Unterrichtsbetrieb unter unglaublichen Verhältnissen — das Physikalische Institut begann mit zwei Kellerräumen — wieder anlaufen zu lassen. Was in diesen Jahren durch Überarbeit geleistet wurde, um aus dem Trümmerhaufen wieder etwas Sinnvolles aufzubauen, werden erst spätere Generationen, die Abstand gewonnen haben, voll würdigen. In diese Zeit fällt auch die Gründung der Zeitschrift für angewandte Physik und der Wiederaufbau der Physikalischen Gesellschaft in Bayern, Maßnahmen, die eine Notwendigkeit waren, MEISSNER aber auch neue Arbeitslast brachten.

Eine sehr große Zahl von Schülern und Freunden gedenkt am 16. 12. 1952 nicht nur des glänzenden Forschers und Lehrers, sondern auch des geraden, stets furchtlos den Weg des Rechts schreitenden Menschen und er selbst kann stolz gerade auf die Leistungen der letzten Jahre zurückblicken, wobei es ihm eine besondere Befriedigung sein dürfte, daß sein ältester Sohn nun bereits mit sehr beachtlichen Arbeiten aus dem Gebiet tiefster Temperaturen hervortritt. Unser aller Wünsche aber gehen dahin, daß ihm vergönnt sein möge, alle seine Forschungspläne in der gewohnten Frische und Spannkraft durchzuführen.

G. Joos.

Ergebnisse der Tieftemperaturforschung.

X. Atomwärme des Indiums zwischen 12° und 273° K.

Von KLAUS CLUSIUS und LISELOTTE SCHACHINGER [1].

Mit 1 Textabbildung.

(Eingegangen am 26. Juli 1952.)

1. Unsere Kenntnis der Atomwärme des Indiums ist noch recht lückenhaft. Im Rahmen seiner klassischen calorimetrischen Untersuchungen hat R. W. BUNSEN die mittlere spez. Wärme des Metalls zwischen 0 und 100° C gemessen. Er schloß aus dem Ergebnis auf die Dreiwertigkeit des Elements in Übereinstimmung mit LOTHAR MEYER und im Gegensatz zu MENDELEJEFF, der Indium wie die meisten seiner Zeitgenossen irrümlicherweise für maximal zweiwertig hielt [2]. Erst 60 Jahre später beschäftigte sich W. A. ROTH wieder mit der mittleren Atomwärme des Elements, die er zwischen 0° C und dem Schmelzpunkt bestimmte [3], und in jüngster Zeit wurde schließlich die Atomwärme bei Heliumtemperaturen gemessen [4]. Die bis Zimmertemperatur bestehende Lücke ist von uns bereits 1943/44 durch Messungen nach der Methode des Vakuumkalorimeters ausgefüllt worden, über die wir jetzt berichten [5].

Indium ist ein lohnendes Versuchsobjekt zur Prüfung der DEBYESchen Theorie der Atomwärme, da es sich wegen seines niedrigen Schmelzpunktes T_e von 156,4° C wie wenig andere Metalle bis zu hohen Werten von T/T_e genau untersuchen läßt. Eine Messung des Indiums bis 0° C ist einer Messung des Platins bis über 1000° C äquivalent, aber viel einfacher und genauer auszuführen.

2. Indium in einer Reinheit von über 99,8% wurde in Stengeln von der *Bergmetall G. m. b. H.* geliefert. Es wurde in einem Glasrohr von 22 mm Durchmesser mit abgeflachtem Boden im Vakuum in einem Paraffinbad langsam auf 185° C erwärmt. Das eingeschmolzene Metall blieb auf dieser Temperatur, bis keine Gasblasen mehr aufstiegen, wurde dann um 10° abgekühlt und schließlich durch eingelassene trockene Luft komprimiert. Der Block durfte langsam auf Zimmertemperatur abkühlen, worauf er sich infolge des großen Ausdehnungskoeffizienten am nächsten Tage leicht herausziehen ließ. Er war lunkerfrei und enthielt keine Oxydeinschlüsse.

Aus ihm wurde ein Zylinder von 17,1 mm Durchmesser und 36 mm Länge gedreht, der zur Aufnahme des 0,05 mm dicken Konstantandrahts eine feine Nut von 1,5 mm Steigung erhielt. Dieser Heizdraht wurde in der üblichen Weise mit feinstem Seidenpapier und etwas Japanlack bedeckt und ein Bleidraht von 148,7 Ohm Widerstand bei 0° C zur Temperaturmessung aufgewickelt. Mit Hilfe von Eichungen durch Sauerstoff- und Wasserstoffdampfdruckthermometer und der NERNSTSchen α -Regel wurde die gemessene „Bleitemperatur“ auf wahre Temperaturen korrigiert; die spez. Wärme von Lack, Pb-Draht usw. wurde als additive Korrektur rechnerisch berücksichtigt.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 mitgeteilt. Indium besitzt im ganzen untersuchten Temperaturbereich keinen Umwandlungspunkt. Bei 0° C stimmen unsere Werte gut mit den alten Ergebnissen von ROTH-BUNSEN überein, für die KELLEY oberhalb von

Zimmertemperatur die Interpolationsformel

$$C_p = 5,12 + 4,38 \cdot 10^{-3} T$$

angegeben hat [6]. Diese liefert für 0° C die Atomwärme zu 6,32 cal/°, während wir aus unseren Daten graphisch 6,34₂ cal/° finden. Bei tiefen Temperaturen ist ein eingehender Vergleich mit den bisher nur in graphischer Darstellung vorliegenden Messungen von CLEMENT und QUINNELL [4] noch nicht möglich. Immerhin scheinen die bei Wasserstoff- und Heliumtemperaturen gemessenen Kurven vernünftig ineinander überzugehen.

Die Standard-Entropie des Indiums bei 25° C ergibt sich graphisch zu 13,88₂ Clausius.

3. Indium kristallisiert tetragonal mit den Achsen $a = b = 4,58$ Å und $c = 4,94$ Å; es steht also mit dem Gittertyp A 6 den kubisch-flächenzentrierten Metallen vom Typ A 1 nahe. Demnach sollte man erwarten, daß sich die DEBYESche Theorie der spez. Wärme recht gut anwenden läßt. Zur Prüfung muß die gemessene Atomwärme konstanten Druckes C_p auf die Atomwärme konstanten Volumens C_v umgerechnet werden. Dazu wertet man die thermodynamische Beziehung

$$C_p - C_v = \frac{\alpha^2 v_0^2 T}{v \chi} \approx \frac{\alpha^2 v_0 T}{\chi}, \quad (2)$$

bei einer bestimmten Temperatur exakt aus und ermittelt so den Proportionalitätsfaktor A der NERNST-LINDEMANNschen Näherungsformel

$$C_p - C_v = A C_p^2 T = 3,36 \cdot 10^{-5} C_p^2 T. \quad (3)$$

Der numerische Wert von A ergibt sich in folgender Weise.

Die Kompressibilität χ erhielt RICHARDS mit SAMESHIMA [7] zu $2,69 \cdot 10^{-6}$ cm²/kg und später mit WHITE an einer größeren, reinen Probe zu $2,55 \cdot 10^{-6}$ cm²/kg [8]. Wir verwenden diesen letzteren Wert.

Für den kubischen Ausdehnungskoeffizienten gibt es verschiedene Unterlagen. WESTBROOK führt kommentarlos einen linearen Ausdehnungskoeffizienten an, der einem kubischen von $99 \cdot 10^{-6}/^\circ$ entspricht [9]. G. SHINODA [10] findet aus Röntgenmessungen zwischen 23° und 87° C die linearen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha_a = 45,0 \cdot 10^{-6}/^\circ$ und $\alpha_c = 11,7 \cdot 10^{-6}/^\circ$. Da für das tetragonale Gitter $a = b \neq c$ ist, ergibt sich der kubische Ausdehnungskoeffizient zu

$$\alpha = (2 \cdot 45,0 + 11,7) \cdot 10^{-6}/^\circ = 101,7 \cdot 10^{-6}/^\circ.$$

Dagegen erhalten FREVEL und OTT zwischen -25° und 141° C $\alpha_a = 56 \cdot 10^{-6}/^\circ$ und $\alpha_c = 13 \cdot 10^{-6}/^\circ$, woraus der erheblich größere Wert $125 \cdot 10^{-6}$ für den mittleren kubischen Ausdehnungskoeffizienten folgt [11]. Noch weniger sind mit diesem Ergebnis ältere Daten von FIZEAU [12] zu vereinbaren. Die mit einer optischen Interferenzmethode erhaltenen Werte dieses gewissenhaften Beobachters kommen dem linearen Ausdehnungskoeffizienten α_a der Röntgenspektro-

Tabelle 1. Atomwärme von Indium.
(gemessen wurden 57,387 g = 0,5006 g-Atome;
Atomgewicht = 114,76)

Meßreihe I	: am	8. 12. 43	Bad: fester und flüssiger H ₂
„ II	: „	10. 12. 43	„ flüssige Luft
„ III	: „	17. 12. 43	„ festes CO ₂ in CH ₃ OH
„ IV	: „	18. 12. 43	„ flüssige Luft
„ V	: „	12. 1. 44	„ fester und flüssiger H ₂

Meßreihe	T (° abs)	C _p	Meßreihe	T (° abs)	C _p
V/1	12,09	0,7553	I/29	72,30	5,178
V/16	12,51	0,7605	I/30	75,61	5,198
V/2	13,00	0,8618	V/39	77,90	5,245
V/7	13,04	0,8951	I/31	79,34	5,273
I/1	13,17	0,8951	V/40	80,48	5,296
V/17	13,94	0,9608	II/1	80,95	5,305
V/8	14,16	0,9427	I/32	81,10	5,300
V/3	14,25	0,9772	V/41	83,40	5,341
I/2	14,47	1,041	II/2	84,26	5,346
I/11	15,62	1,060	I/33	84,26	5,365
V/18	15,64	1,147	I/34	86,10	5,364
I/3	15,92	1,204	II/3	87,69	5,378
V/4	16,12	1,217	IV/1	87,74	5,408
V/9	16,22	1,208	I/35	88,26	5,389
I/5	16,82	1,319	I/36	90,83	5,454
I/4	17,33	1,385	II/4	91,12	5,455
V/19	17,81	1,451	IV/2	92,21	5,501
V/5	18,16	1,429	I/37	93,11	5,483
I/12	18,76	1,453	II/5	94,52	5,509
V/10	18,89	1,549	I/38	95,28	5,477
I/6	19,27	1,624	IV/3	96,69	5,528
V/6	20,11	1,740	II/6	98,25	5,542
V/20	20,24	1,743	IV/4	101,71	5,599
I/7	20,26	1,832	II/7	102,42	5,576
V/11	21,51	1,907	II/8	106,50	5,647
V/21	22,44	2,056	IV/5	108,96	5,657
I/13	23,16	2,066	IV/6	114,16	5,723
I/8	23,28	2,107	II/9	114,75	5,739
V/12	24,00	2,233	II/10	118,70	5,811
V/22	24,87	2,343	IV/7	119,80	5,781
I/9	25,59	2,441	II/11	122,79	5,811
I/14	25,69	2,443	IV/8	124,88	5,811
V/13	26,32	2,525	II/12	126,52	5,859
V/23	27,37	2,667	IV/9	129,97	5,867
I/10	27,83	2,693	II/13	130,51	5,873
V/14	28,70	2,793	IV/10	135,61	5,893
V/24	30,00	2,992	II/14	137,41	5,947
V/15	31,40	3,092	II/15	143,88	5,953
I/15	32,40	3,220	II/16	148,67	5,991
V/25	32,86	3,246	II/17	153,32	6,017
I/16	34,91	3,490	II/18	162,43	6,015
V/26	36,11	3,534	II/19	166,98	6,077
I/17	37,31	3,724	II/20	172,02	6,029
V/27	39,58	3,807	II/21	176,83	6,107
I/18	39,97	3,847	II/22	182,13	6,115
I/19	42,92	4,085	II/23	187,69	6,109
V/28	43,62	4,091	II/24	192,44	6,147
I/20	45,90	4,237	II/25	197,91	6,147
V/29	47,67	4,283	III/1	201,47	6,173
I/21	50,20	4,475	II/26	202,96	6,157
V/30	51,57	4,453	III/2	204,31	6,208
I/22	52,96	4,541	III/3	207,17	6,187
V/31	53,56	4,602	III/4	212,14	6,195
I/23	55,38	4,668	III/5	217,94	6,225
V/32	56,32	4,710	III/6	223,94	6,241
I/24	58,42	4,790	III/7	229,75	6,237
V/33	58,52	4,758	III/8	235,79	6,250
I/25	60,39	4,844	III/9	241,68	6,274
V/34	60,69	4,874	III/10	250,28	6,320
I/26	62,84	4,912	III/11	254,32	6,330
V/35	65,14	5,002	III/12	258,30	6,326
I/27	66,68	5,000	III/13	262,08	6,316
V/36	66,98	5,012	III/14	267,44	6,272
V/37	69,23	5,082	III/15	269,21	6,358
I/28	69,55	5,148	III/16	272,72	6,336
V/38	71,39	5,144			

noch WILLIAMS und MILLER für die Dichte des festen Indiums oberhalb 25° die Beziehung

$$\varrho_{fest} = 7,321 - 0,000713 t \quad (4)$$

mit [13]; aus ihr berechnet sich der kubische Ausdehnungskoeffizient zu $97,5 \cdot 10^{-6}/^{\circ}$. Nach der Art, wie die Messung durchgeführt wurde, handelt es sich hier sicherlich um einen Mittelwert über alle Kristallrichtungen, so daß wir ihn für die Korrektion zugrunde legen.

Die Dichte des Indiums ist in neuerer Zeit mehrfach gemessen worden, und alle diese Werte stimmen recht gut überein: $\varrho_4^{20} = 7,314$ [8], $\varrho_4^{24} = 7,282 \pm 0,007$ [14], $\varrho_4^{20} = 7,314$ [3], $\varrho_4^{18} = 7,308$ [15], $\varrho_4^{25} = 7,303$ [13]. Benutzt man für 25° C den letzten Wert, so erhält man mit dem Atomgewicht 114,76 das Atomvolumen zu $114,76/7,303 = 15,71$ cem/gAtom.

Die benutzten Zahlenwerte ergeben in Gl. 2 für 25°:

$$C_p - C_v = \frac{97,5^2 \cdot 10^{-12} \cdot 15,71 \cdot 298,2}{2,55 \cdot 10^{-6} \cdot 42,69} = 0,409 \text{ cal.}$$

Da sich für 25° C ein wahrscheinlichster C_p -Wert von 6,391 cal aus sämtlichen Messungen ergibt, erhält man schließlich den Proportionalitätsfaktor A in Gl. 3 zu $3,36 \cdot 10^{-5}$, wie angegeben.

4. Bei einem Metall von so großer Weichheit und so tiefem Schmelzpunkt wie das Indium steigt die Atomwärme dank der niedrigen charakteristischen Temperatur rasch an. In dem Maße, wie man sich dem klassischen Äquipartitionswert von $3 R = 5,958$ cal/° nähert, wird nun die Intepretation des Verlaufs der Atomwärme enorm empfindlich gegen an sich geringfügige zusätzliche Anteile der spez. Wärme, etwa durch „freie Elektronen“ und ähnliches. Darauf wurde schon früher nachdrücklich hingewiesen [16].

Die Größe der mutmaßlichen Elektronenwärme, die nach SOMMERFELD eine lineare Temperaturfunktion ist, hat KOK in eigentümlicher Weise abgeschätzt [17]. Unter der Voraussetzung, daß die Elektronenwärme C_e der FERMI-DIRAC-Statistik folgt, soll im nichtsupraleitenden Gebiet gelten

$$\gamma = 3,26 \cdot 10^{-5} v^{2/3} n^{1/3} \text{ cal/}^{\circ} \quad (\text{nach SOMMERFELD}), \quad (5)$$

$$C_e = \gamma T; \quad \gamma = \frac{abv}{2} \quad (\text{nach KOK}). \quad (6)$$

Dabei treten neben dem Atomvolumen v und der Zahl der Valenz-Elektronen n ($= 3$ für Indium) noch die Paramter a und b der Beziehung

$$H = - a T^2 + b = - 20,86 T^2 + 237,0 \quad (\text{für In}) \quad (7)$$

auf, in der H die zur Zerstörung der Supraleitung notwendige magnetische Feldstärke bedeutet. Berücksichtigt man die thermische Ausdehnung und setzt man entsprechend zwischen 0° C und Heliumtemperaturen ein mittleres Atomvolumen von 15,25 cem ein, so erhält man sowohl nach SOMMERFELD wie nach KOK für die Elektronenwärme

$$\text{berechnet: } C_e = 2,88 \cdot 10^{-4} T \text{ cal/}^{\circ} \text{ g-Atom.} \quad (8)$$

Zuverlässiger als diese rechnerischen Werte dürften unmittelbar gemessene sein. So finden CLEMENT und QUINNELL [4] aus dem Unterschied der Atomwärme im supra- und nichtsupraleitenden Zustand γ zu $4 \cdot 10^{-4}$. DAUNT, HORSEMAN und MENDELSSOHN

skopiker nahe. Daher scheint es nicht unmöglich, daß FIZEAU die Ausdehnung einer weitgehend einkristallinen Probe untersucht hat. Kürzlich teilten

[18] erhalten aus Leitfähigkeitsmessungen in verschiedenen Magnetfeldern γ zu $3,5 \cdot 10^{-4}$ und MISENER [19] in naher Übereinstimmung zu $3,6 \cdot 10^{-4}$. Wir wählen den Mittelwert dieser letzten Autoren

bereits bei 260° abs wieder den Nullwert erreichen, liegt nach Abzug der Elektronenwärme der Θ_D -Wert zwischen 125° bis 140°. Übrigens liefert die GRÜN-EISENSCHE Formel in auffallender Übereinstimmung

Tabelle 2. Atomwärme des Indiums in cal/g-Atom zwischen 20° und 273,2° K.

1	2	3	4	5	6	7	8
$T^\circ \text{K}$	$C_p \text{ graph}$	$C_p - C_v$	C_v 2-3	Θ_D (C_v)	C_e	$C_p - C_e$ 4-6	Θ_D ($C_v - C_e$)
20	1,694	0,002	1,692	116	0,007	1,685	116
40	3,856	0,019	3,837	124	0,014	3,823	125
60	4,826	0,046	4,780	129	0,021	4,759	131
80	5,288	0,075	5,213	133	0,028	5,185	135
100	5,572	0,103	5,469	132	0,035	5,434	137
120	5,783	0,135	5,648	125	0,043	5,605	133
140	5,939	0,167	5,772	111	0,050	5,722	126
160	6,036	0,198	5,838	101	0,057	5,781	124
180	6,103	0,225	5,878	93	0,064	5,814	126
200	6,162	0,255	5,907	81	0,071	5,836	128
220	6,218	0,286	5,932	63	0,078	5,854	130
240	6,264	0,318	5,946	45	0,085	5,861	136
260	6,310	0,349	5,961	—	0,092	5,869	140
273,2	6,342	0,370	5,972	—	0,097	5,875	143
298,2	6,391	0,409	5,982	—	—	—	—

für unsere Deutung der Atomwärme des Indiums und setzen also:

$$C_e = 3,55 \cdot 10^{-4} T \text{ cal/}^\circ \text{g-Atom.} \quad (9)$$

Dieser Wert für die Elektronenwärme ist klein. Er macht zwischen der Temperatur der flüssigen Luft und 0° nur 0,6—1,5% von der gemessenen Atom-

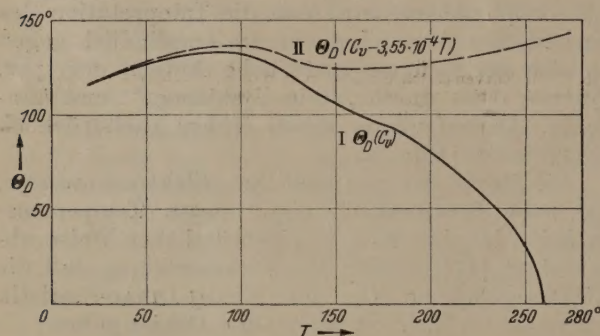


Abb. 1. Verlauf der charakteristischen DEBYESchen Temperatur Θ_D des Indiums. Kurve I für die unmittelbar gemessenen C_v -Werte; Kurve II für die um die Elektronenwärme C_e verminderten Atomwärmen $C_p - C_e$.

Nur letztere ergeben einen einigermaßen konstanten Θ_D -Wert, erstere nicht.

wärme aus und ist in diesem Bereich etwa 3- bis 4mal kleiner als die Korrektur $C_p - C_v$. Trotzdem wird bei Berücksichtigung der Elektronenwärme eine viel bessere Darstellung der Atomwärme durch eine DEBYE-Funktion erreicht. In Tab. 2 sind für eine Anzahl glatte Temperaturen graphisch ausgeglichene Werte von C_p und den anderen Anteilen der Atomwärme zusammengestellt. In Abb. 1 ist schließlich noch der Verlauf der DEBYESchen charakteristischen Temperatur einmal ohne und einmal mit Berücksichtigung der Elektronenwärme dargestellt. Man sieht, daß eine befriedigende Wiedergabe der Atomwärme durch einen im ganzen Temperaturbereich einigermaßen einheitlichen Θ_D -Wert nur möglich ist, wenn man die Elektronenwärme in Rechnung stellt. Während ohne Berücksichtigung der Elektronenwärme die Θ_D -Werte ein Maximum durchlaufen und

mit unserem Ergebnis einen Θ -Wert von 131°, während die LINDEMANNsche Schmelzpunktsformel den etwas zu kleinen Wert von 104° ergibt.

Zusatz bei der Korrektur, Nach WEXLER und CORAK [20] geben CLEMENT und QUINNELL neuerdings γ von Indium zu $3,23 \cdot 10^{-4}$ an. Dieser Wert liefert innerhalb der Fehlergrenzen denselben Verlauf für $\Theta_D (C_v - C_e)$.

Der experimentelle Teil der vorliegenden Arbeit wurde im Winter 1943/44 im Physikalisch-chemischen Institut der Universität München ausgeführt.

Zusammenfassung.

Die Atomwärme konstanten Drucks C_p des Indiums wird von der Temperatur des festen Wasserstoffs bis 0° C hinauf gemessen. Die Normalentropie bei 25° C ergibt sich zu 13,88 Clausius. Mit der Korrektur $C_p - C_v = 3,36 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ erhält man die Atomwärme konstanten Volumens C_v . Sie läßt sich nicht ohne weiteres als Funktion einer bestimmten DEBYESchen charakteristischen Temperatur Θ_D darstellen. Zieht man jedoch die Elektronenwärme $C_e = 3,55 \cdot 10^{-4} T \text{ cal/}^\circ \text{g-Atom}$ von C_v ab, so weist der Θ_D -Wert für $C_v - C_e$ keinen größeren Gang mehr auf und variiert nur von 125 bis 140° im gemessenen Temperaturbereich. Diese Feststellung darf als Nachweis der Elektronenwärme beim Indium gelten.

Literatur. [1] Letzte Veröffentlichung: IX. Atomwärme des Kobalts zwischen 15° und 270° K. Z. Naturforsch. 7a, 185 (1952). — [2] BUNSEN, R. W.: Pogg. Ann. 141, 27 (1870). — [3] ROTH, W. A., I. MEYER u. H. ZEUMER: Z. angew. Chem. 214, 315 (1933). — [4] CLEMENT, J. R. u. E. H. QUINNELL: Physic. Rev. 79, 1028 (1950). — [5] Kurz mitgeteilt in Fiat Review, Bd. 30: Physic. Chem. S. 50 (1948). — [6] KELLEY, K. K.: Bl. Bur. Mines, Nr. 371, 66 (1934). — [7] RICHARDS, T. W. u. J. SAMESHIMA: J. Amer. chem. Soc. 42, 53 (1920). — [8] RICHARDS, T. W. u. J. D. WHITE: J. Amer. chem. Soc. 50, 3299 (1928). — [9] WESTBROOK, L. R.: Trans. Amer. Elektrochem. Soc. 57, 289 (1930). — [10] SHINODA, G.: Mem. Sci. Kyoto Univ. A. 16, 198 (1933). — [11] FREVEL, L. K. u. E. ÖTT: J. Amer. chem. Soc. 57, 228 (1935). — [12] FIZEAU, H.: C. R. 68, 1155 (1869) u. Pogg. Ann. Physik 138, 31 (1869). — [13] WILLIAMS, D. D. u. R. R. MILLER: J. Amer. chem. Soc. 72, 3821 (1950). — [14] BECKER, G. u. W. A. ROTH: Z. physik. Chem. (A) 161, 69 (1932). — [15] ZINTL, E. u. S. NEUMAYR: Z. Elektrochem. 39, 81 (1933). — [16] CLUSIUS, K. u. L. SCHACHINGER: Z. Naturforsch. 2a, 95 (1947). — [17] KOK, J. A.: Physica 1, 1103 (1933/34) s. a. Suppl. Comm. Leid. 77a und Nature 134, 532 (1934). — [18] DAUNT, J. G., A. HORSEMAN u. K. MENDELSSOHN: Phil. Mag. 27, 754 (1939). — [19] MISENER, A. D.: Proc Roy. Soc. A 174, 262 (1940). — [20] WEXLER, A. u. W. S. CORAK, Phys. Rev. 85, 85 (1952).

Prof. Dr. KLAUS CLUSIUS

und Dr. LISELOTTE SCHACHINGER,

Physikalisch-Chemisches Institut der Universität Zürich.

Bemerkungen zum Schwarzschild-Effekt.

Von JOHN EGGERT, Zürich.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

Unter SCHWARZSCHILD-Effekt wird allgemein die Erscheinung verstanden, daß eine bestimmte Lichtmenge nicht den gleichen photographischen Effekt liefert, je nachdem sie mit großen oder mit kleinen Bestrahlungsstärken (auf der Schichtoberfläche gemessen) erzeugt wurde. SCHWARZSCHILD war zwar nicht der erste, der die Erscheinung beobachtete, in dessen verdanken wir ihm ihre erste, genauere Untersuchung sowie eine zahlenmäßige Formulierung, die eng an die von HURTER und DRIFFIELD aufgestellte Schwärzungskurve anknüpft. SCHWARZSCHILD argumentierte: Man sollte erwarten, daß eine bestimmte Schwärzung S^1 unter vergleichbaren Umständen von der Lichtmenge $i \cdot t$ allein, also von dem Produkt aus der Bestrahlungsstärke i und der Bestrahlungsdauer t , abhängt, im Sinne der Beziehung $S = \varphi(i \cdot t)$. Es zeigt sich aber, daß die Abhängigkeit von S , in weiten Grenzen von i und t betrachtet, zutreffender durch eine Funktion der Art $S = \chi(i^p \cdot t)$ oder $S = \varphi(i \cdot t^p)$ wiedergegeben wird. Die Größe p (oder ihr Kehrwert q) wird von SCHWARZSCHILD als eine Zahl bezeichnet, die für ein begrenztes Gebiet die einzelnen Faktoren i und t zu interpolieren gestattet, die aber keinesfalls als Materialkonstante anzusehen ist, weil sie selbst in den verschiedenen Belichtungs- und Schwärzungsgebieten veränderlich ist. Bekanntlich werden diese klaren Einschränkungen SCHWARZSCHILDs in der Literatur vielfach nicht beachtet.

Am unmittelbarsten geht die physikalische Bedeutung von p vielleicht aus folgenden Betrachtungen hervor [1]. Wählt man zur Aufzeichnung der experimentellen Befunde ein Netz, dessen Abszisse durch $\lg t$ und dessen Ordinate durch $\lg i$ gegeben ist, und zeichnet man in dieses Netz die Kurven gleicher Schwärzungen S ein, so entsteht eine Schar, wie sie für einen bestimmten Fall in Abb. 1 dargestellt ist [2]. Für kleine Gebiete sind die Kurven geradlinig anzusehen, so daß man schreiben darf:

$$\lg i + \lg t \cdot \alpha = \text{const},$$

wobei $\lg \alpha$ für den Winkel α gilt, den die Gerade mit der positiven Abszisse bildet.

Für die Neigung der Kurven folgt also allgemein: $\frac{d \lg i}{d \lg t} = -\lg \alpha$; da überall $\alpha > 90^\circ$ ist, kann man $-\lg \alpha = p$ als einfache Deutung für den SCHWARZSCHILD-Exponenten p betrachten; er ist in den meisten Fällen eine positive Größe. — Wie man aus den in Abb. 1 angeschriebenen Zahlen erkennt, kann der absolute Wert von p größer, kleiner oder gleich 1 sein. Bei dem Wert $p = 1$ besteht „Reziprozität“. In diesem Falle, der für das etwa im Zentrum von Abb. 1 gelegene Gebiet gilt, kann ein unbekanntes t' bei gegebenem i' aus einem bereits bekannten Wertepaar i und t ermittelt werden nach

$i' \cdot t' = i \cdot t$ (für die gleiche Schwärzung). Für Werte $p > 1$, die man normalerweise bei hohen Bestrahlungsstärken beobachtet, müssen im Vergleich zur „Reziprozität“ die Belichtungszeiten um einen *kleineren* Bruchteil verkürzt werden, als man die Größen i vervielfacht. Für Werte $p < 1$, die gewöhnlich im Gebiete kleiner Bestrahlungsstärken anzutreffen sind, müssen im Vergleich zur „Reziprozität“ die Belichtungszeiten mit einem *größeren* Faktor vervielfacht werden, als es dem Bruchteil entspricht, um den die Größen i herabgesetzt werden.

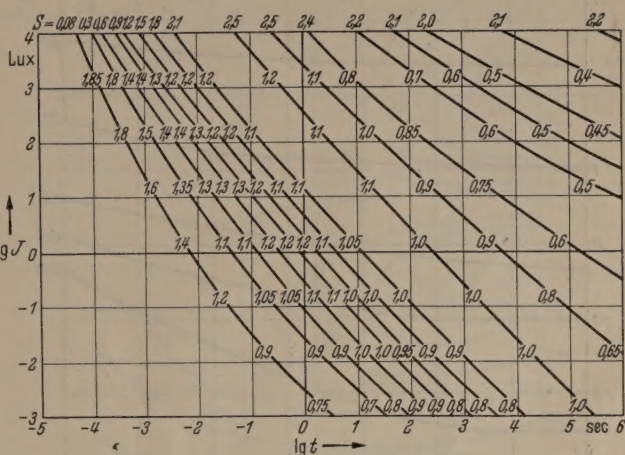


Abb. 1. Die Kurven gleicher Schwärzung S in Abhängigkeit vom Logarithmus der Belichtungszeit ($\lg t$) und vom Logarithmus der Bestrahlungsstärke der Schicht ($\lg i$) für die Agfa Extrarapidplatte. Die in den Kurven angegebenen Zahlen entsprechen der Neigung der Kurve an der betreffenden Stelle; die Werte sind gleich dem Schwarzschild-Exponenten p .

Geht man z. B. von einem Wertepaar i, t zu einem beliebigen anderen i', t' über, so daß $i' = n \cdot i$ und $t' = m \cdot t$ wird, so gilt nach der Interpolationsformel von SCHWARZSCHILD:

$$i \cdot t^p = i' \cdot t'^p = (n \cdot i) \cdot (m \cdot t)^p,$$

so daß für beliebige Werte von p, n und m folgt:

$$m = n^{-1/p}.$$

Für $p = 1$ sind m und n reziprok. Geht man von einem i mittlerer Größe zu sehr hoher Bestrahlungsstärke über ($n \gg 1$), so folgt, da in diesem Falle gewöhnlich $p > 1$ ist, für m eine Zahl, die größer ist als der Kehrwert von n . Geht man dagegen zu sehr kleiner Bestrahlungsstärke über ($n \ll 1$), so folgt, da nunmehr meist $p < 1$ ist, für m eine Zahl, die kleiner ist als der Kehrwert von n . In beiden Fällen ist das Produkt $i' \cdot t'$ größer als dasjenige des ursprünglichen Wertepaares $i \cdot t$:

$$i' \cdot t' = (n \cdot i) \cdot (m \cdot t) = (n \cdot i) \cdot (n^{-1/p} \cdot t)$$

$$= i \cdot t \cdot n^{p-1/p},$$

da der Faktor $n^{p-1/p} > 1$ ist für die (z. B. in Abb. 1 vorliegenden) Kombinationen: $n > 1$ mit $p > 1$ und $n < 1$ mit $p < 1$.

Schon seit längerer Zeit, in der man sich (übrigens der Forderung von SCHWARZSCHILD folgend) näher mit diesen Effekten beschäftigt hat, haben sich für das Gebiet allmählich, zumal in der angelsächsischen

¹ SCHWARZSCHILD spricht übrigens in seiner berühmten Arbeit „Über sensitometrische Regeln und ihre astronomische Anwendung“, Jb. Phot. Reproduktionstechnik 14, 161–176 (1900), aus der wir hier referieren, immer von „Schwärzung S “, nicht von der „Dichte D “, eine Bezeichnung, die man heutzutage der Extinktion von Farbschichten vorbehalten sollte.

Literatur, andere Darstellungen eingeführt [3]. Einerseits entfernen sie sich wieder von dem bereits vollzogenen Anschluß an die klassische Schwärzungs-

setzung“ gibt, sondern höchstens ein Postulat oder eine Erwartung der Reziprozität, sollte man mit SCHWARZSCHILD allenfalls von einer „Reziprozitätsregel“ und deren Ausnahmen reden.

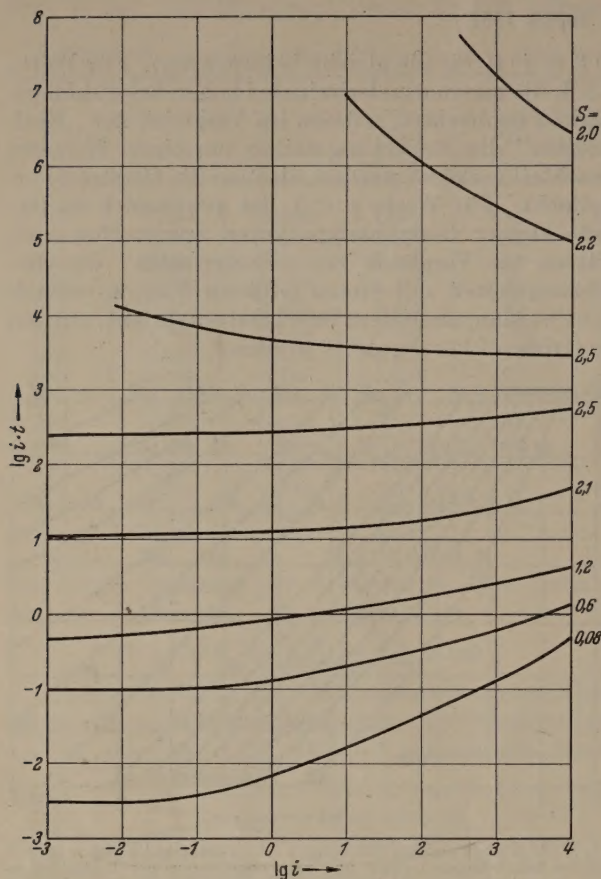


Abb. 2. Die in Abb. 1 dargestellten Kurven so umgerechnet, daß als Abszisse $\lg i$ und als Ordinate $\lg i \cdot t$ erscheint. Gegenwärtig vielfach übliche Darstellung des SCHWARZSCHILD-Effektes (nach KRON). Die Neigung π dieser Kurven steht mit p von Abb. 1 in der einfachen Beziehung (1) oder (2).

kurve, wobei die Größe des SCHWARZSCHILD-Exponenten p nicht mehr in Erscheinung tritt, und andererseits lassen sie die eingebürgerte Bezeichnung „SCHWARZSCHILD-Effekt“ in Vergessenheit geraten.

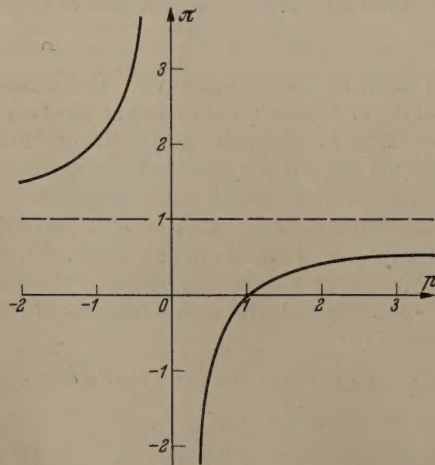


Abb. 3. Der Zusammenhang zwischen p und π in graphischer Darstellung.

Man spricht vom „Versagen des Reziprozitäts-Gesetzes“ („Reciprocity-law-failure“) für hohe Intensität (high intensity) und für niedrige Intensität (low intensity). Da es im Grunde kein Reziprozitäts-, Ge-

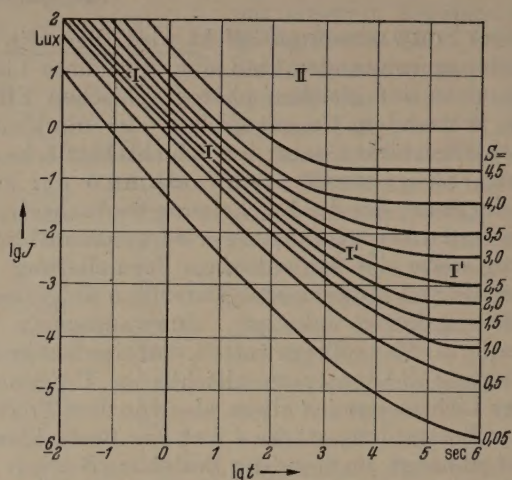


Abb. 4. Die der Abb. 1 entsprechenden Kurven für die Agfa-Diapositiv-Platte. Am rechten Rande verlaufen die Kurven parallel zur Abszisse, entsprechend $p = 0$.

Die besagte andere Darstellung des SCHWARZSCHILD-Effektes (die auf KRON zurückgeht) geschieht in der Weise, daß die Beobachtungen in ein Netz eingetragen werden, dessen Abszisse die Werte von $\lg i$ (oder auch $\lg t$) enthält, während die Ordinate die-

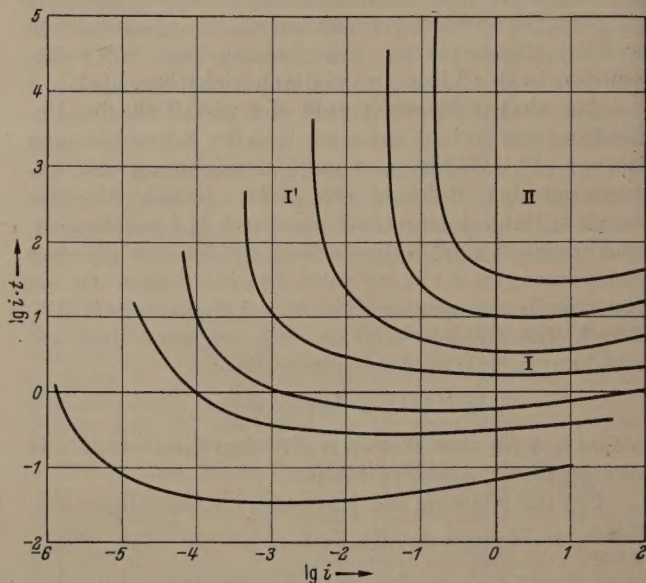


Abb. 5. Die in Abb. 4 wiedergegebenen Kurven in der Darstellung von Abb. 2; dem Wert $p = 0$ von Abb. 4 entspricht hier $\pi = -\infty$.

jenigen $\lg i \cdot t$ -Größen abzulesen erlaubt, die zu Werten gleicher Schwärzung S führen. In der Abb. 2 sind die Messungen von Abb. 1 auf diese Weise wiedergegeben. In dieser Darstellung erkennt man das Vorliegen von Reziprozität in solchen Gebieten, in denen die Kurven gleicher Schwärzung der Abszisse parallel laufen.

Wir untersuchen, auf welche Weise aus der neuen Aufzeichnung (Abb. 2) der SCHWARZSCHILD-Exponent p zu ermitteln ist, der in der alten Darstellung einfach durch den negativen Wert der Kurven-Neigung gegeben war. Für kleine Gebiete sind die Kurven wiederum als Gerade zu betrachten, so daß

an, entsprechend den früheren Festsetzungen (nur tritt der Winkel β — für $\beta < 90^\circ$ — an die Stelle von α) schreiben darf:

$$\lg i \cdot t - \operatorname{tg} \beta \lg i = \text{const.}$$

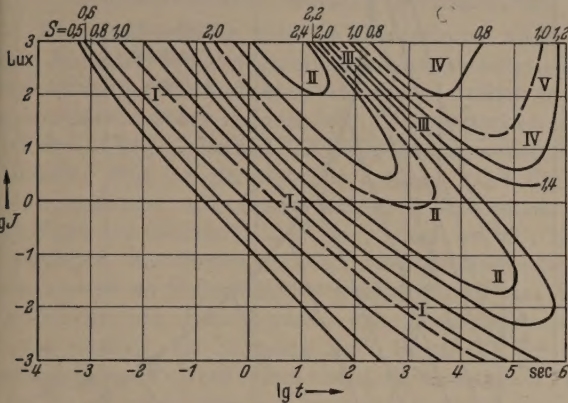
Für die Neigung der Kurven folgt also allgemein:

$$\frac{d \lg i \cdot t}{d \lg i} = \frac{d \lg i + d \lg t}{d \lg i} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg} \beta = 1 + \frac{d \lg t}{d \lg i}.$$

Da der zweite Summand der rechten Seite gleich dem negativen reziproken Wert von p ist, erhält man

$$\text{entweder } \operatorname{tg} \beta = 1 - \frac{1}{p} \text{ oder } p = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \beta}. \quad (1)$$



Die komplexe Permeabilität eines hochpermeablen Ferritkernes.

Von RICHARD FELDTKELLER und OTTO KOLB, Stuttgart.

(Mitteilungen aus dem Institut für elektrische Nachrichtentechnik der Technischen Hochschule in Stuttgart.)

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 22. Juli 1952.)

Es hat sich vielfach bewährt, bei ferromagnetisch weichen Materialien die Ortskurve aufzuzeichnen, welche die komplexe Permeabilität als Funktion der Frequenz durchläuft, und die Form und Frequenzteilung dieser Ortskurve zu diskutieren. Ortskurven enthüllen besonders deutlich den inneren Zusammenhang zwischen ihrem Realteil und ihrem Imaginärteil. Dieser Zusammenhang ist ein ausgezeichnetes Mittel zur Analyse komplizierter Wechselstromerscheinungen. Die komplexe Permeabilität steht unter dem Einfluß einer ganzen Reihe magnetischer Teilvorgänge wie Hysterese, Nachwirkung, Wirbelströme, Magnetostraktion usw. Erfahrungsgemäß ist die Ortskurve zur Analyse der Wirkungen dieser Teilvorgänge nützlich, vorausgesetzt, daß sie in einem sehr weiten Frequenzbereich und in einem großen Bereich der Amplitude der Feldstärke genügend genau bekannt ist.

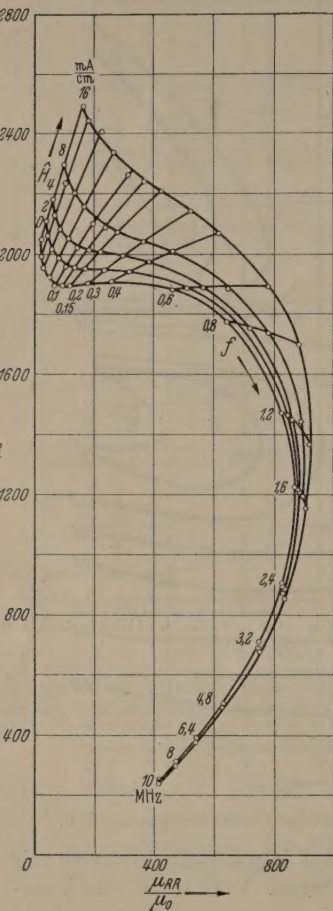


Abb. 1. Die komplexe Permeabilität von Siferit 2000 Tr 7.

Abb. 1 zeigt die an einem Ni-Zn-Ferrit¹ gemessenen Ortskurven der komplexen Permeabilität. Der Kern war ringförmig, der Materialquerschnitt etwa 0,23 cm², die mittlere Kraftlinienlänge rund 7,1 cm. Gemessen wurde bei einer sehr genau konstant gehaltenen Temperatur von 33°C und bei

Wechselfeldstärken von 2 bis 16 $\frac{\text{mA}}{\text{cm}}$. Abb. 1 zeigt

auch die auf verschwindende Feldstärke extrapolierte Ortskurve. Betrachten wir diese Kurve in großen Zügen, so sehen wir, daß sie bei tiefen Frequenzen in der Nähe der Ordinatenachse und parallel zu ihr verläuft. Im Gebiet der Tonfrequenz beginnt sie, sich von der Ordinatenachse zu entfernen. Bei 0,1 MHz setzt eine Bewegung senkrecht zur Ordinatenachse ein, die zu einem weiten Bogen führt. Oberhalb

¹ Wir danken der Firma Siemens & Halske, Karlsruhe, für die Zusendung des untersuchten Siferit 2000 Tr. 7, das für die Verwendung in Übertragerkernen entwickelt wurde.

10 MHz nähert sich die Ortskurve der Abszissenachse und gleichzeitig dem Nullpunkt.

Die schon häufiger analysierte Ortskurve der komplexen Permeabilität eines Carbonyl-Eisen-Pulver-

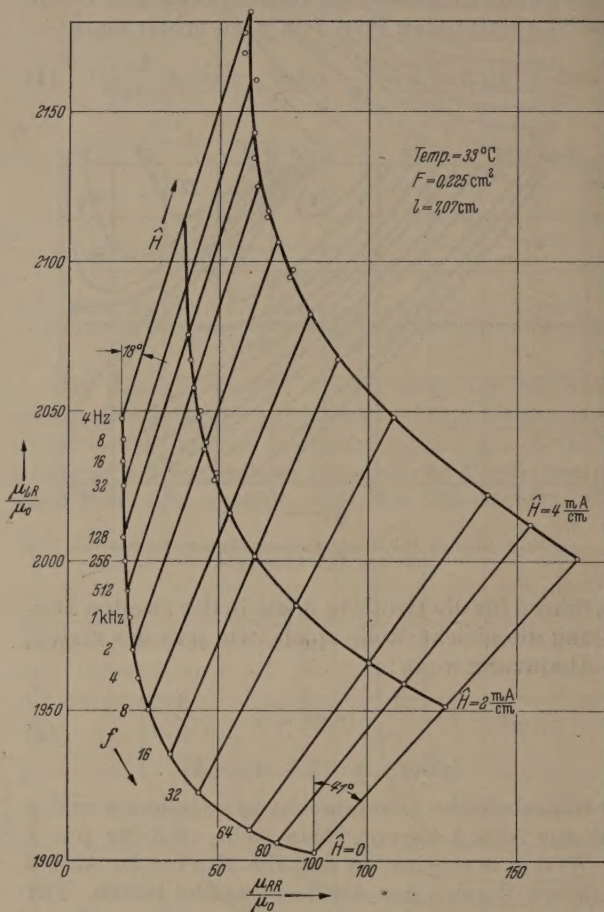


Abb. 2. Die komplexe Permeabilität von Siferit 2000 Tr 7 zwischen 4 Hz und 100 kHz.

kernes oder eines Blechkernes aus einer hochpermeablen Ni-Fe-Legierung verläuft ähnlich. Wir wollen sehen, wieweit sich die dort gewonnenen Ergebnisse auf das untersuchte Ni-Zn-Ferrit übertragen lassen und wo wir charakteristische Unterschiede finden.

1. Niederfrequente JORDAN-Nachwirkung.

Abb. 2 zeigt mit vergrößertem Maßstab und mit stark unterdrücktem Nullpunkt der Ordinatenachse die Ortskurven der komplexen Permeabilität im Frequenzbereich von 4 Hz bis 100 kHz.

Die Kurve für verschwindende Feldstärke verläuft von 4 Hz bis 256 Hz genau parallel der Ordinatenachse bei $\mu_{RR} = 17,5 \mu_0$. In diesem Frequenzbereich sinkt die Induktivitäts-Permeabilität μ_{LR} um $7,5 \mu_0$ je Frequenzoktave. Diese beiden

Zahlen stehen genau im Verhältnis $1 : \frac{2}{\pi} \ln 2 = 1 : 0,44$, wie man es für Relaxationsvorgänge mit

einer sehr großen Streuung der Zeitkonstanten der Einzelprozesse erwartet [5].

Bei Pulverkernen und Blechkernen beobachtet man, daß sich die Ortskurve bei sehr tiefen Frequenzen der Ordinatenachse nähert. Dort sind die Einzelprozesse mit Zeitkonstanten, die so tiefen Frequenzen entsprechen, entsprechend seltener. Der Ferritkern zeigt dieses Nachlassen der Nachwirkung nicht. Die Streuung der Zeitkonstanten dürfte größer als $1:10^3$ sein. Aus den Messungen kann auch auf einen Abfall der Nachwirkung bei hohen Frequenzen nicht geschlossen werden, und deshalb bleibt auch der Mittelwert der Zeitkonstanten dieser Niederfrequenten JORDAN-Nachwirkung unbekannt.

2. Hochfrequente JORDAN-Nachwirkung.

Zwischen 256 Hz und 64 kHz nimmt nicht nur der Abstand von der Ordinatenachse, sondern auch die Abnahme der Induktivitäts-Permeabilität je Frequenzoktave stark zu, z. B. von $7,5 \mu_0$ zwischen 8 und 16 Hz auf $14 \mu_0$, also auf das Doppelte, zwischen 8 und 16 kHz. Das ist ein sicheres Zeichen, daß Relaxationsvorgänge mit entsprechenden Zeitkonstanten häufiger vorkommen, daß hier eine zweite, hochfrequente Komponente der JORDAN-Nachwirkung die komplexe Permeabilität beeinflusst. Eine solche hochfrequente Komponente der JORDAN-Nachwirkung wurde von EINSELE und BAUR [5] bei Carbonyl-Eisen-Pulverkernen ebenfalls beobachtet. Leider ist es nicht möglich, sichere Aussagen über die mittlere Zeitkonstante und die Streuung der Zeitkonstanten zu machen, weil die Hochfrequente JORDAN-Nachwirkung nach tiefen Frequenzen zu nicht sicher von der Niederfrequenten JORDAN-Nachwirkung und erst recht nicht nach hohen Frequenzen zu vom Haupt-Relaxationseffekt getrennt werden kann.

3. Haupt-Relaxationseffekt.

Bei einer Frequenz von 0,1 MHz hört die Abwärtsbewegung der komplexen Permeabilität, die auf den Einfluß der Nachwirkungen zurückgeht, plötzlich auf. Sie wird durch eine Bewegung senkrecht von der Ordinatenachse fort abgelöst, die den großen halbkreisähnlichen Bogen der Ortskurve einleitet.

Bei hochpermeablen Blechen ist dieser Bogen durch die makroskopischen Wirbelströme im Blech bedingt. Er ist dort einem Halbkreis weniger ähnlich. Er beginnt zwar mit einem Viertelkreis, dessen Mittelpunkt auf der Ordinatenachse liegt, nähert sich aber bei hohen Frequenzen dem Nullpunkt nicht längs der Abszissenachse, sondern längs der 45° -Linie oder auch längs der 60° -Linie.

Der Bogen der in Abb. 1 dargestellten Ortskurve der komplexen Permeabilität des untersuchten Ni-Zn-Ferrits beginnt mit einem Viertelkreis, schwingt aber dann über die 45° -Linie weit hinaus und läuft, soweit das die bis 10 MHz durchgeführten Messungen erkennen lassen, auf den Nullpunkt längs der Abszissenachse zu.

Makroskopische Wirbelströme können nicht die Ursache dieses Frequenzganges sein, denn Ferrite sind gute Nichtleiter. Eine andere, befriedigende Erklärung des Frequenzganges ist bisher noch nicht gegeben worden. Wir wollen uns auch darauf be-

schränken, aus der Ortskurve der komplexen Permeabilität möglichst genau abzulesen, was erklärt werden soll.

Wenn die elementaren Ummagnetisierungsvorgänge relaxiert sind und sämtlich dieselben Zeitkonstanten haben, bekommen wir als Ortskurve der komplexen Permeabilität einen Halbkreis mit dem Abstand der Anfangspermeabilität auf der Ordinatenachse vom Nullpunkt als Durchmesser. Wenn die Vorgänge verschiedene Zeitkonstanten haben, bekommen wir eine Ortskurve innerhalb dieses Halbkreises. Wenn die Häufigkeit der Zeitkonstanten über einer logarithmischen Zeitskala durch eine symmetrische Glockenkurve dargestellt werden kann, dann wird auch die Ortskurve symmetrisch und verläuft ähnlich wie eine Ellipse, deren große Achse mit der Ordinatenachse zusammenfällt. Abb. 1 zeigt, daß die Ortskurve der komplexen Permeabilität des untersuchten Ferrits innerhalb eines Halbkreises verläuft und ein wenig unsymmetrisch ist. Wir müssen deshalb annehmen, daß die elementaren Magnetisierungsvorgänge relaxiert sind, und daß die Zeitkonstanten um den Mittelwert von $\frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6}$ sec = 80 nsec, der Frequenz von $2 \cdot 10^6$ Hz auf dem Scheitel der Ortskurve zufolge, streuen. Die Streuung ist nicht sehr groß und etwas unsymmetrisch.

Man hat vorgeschlagen, den Frequenzgang der komplexen Permeabilität der Ferrite durch Resonanzen (Resonanz zwischen der Trägheit der BLOCH-Wände und ihren Bindungskräften an ihre Ruhelage, gyromagnetische Resonanz der spinnenden Elektronen im spontanen Magnetfeld) zu erklären [1]. Die Ortskurve der komplexen Permeabilität müßte dann aber einen ganz anderen Verlauf haben. Sie müßte sich von der Ordinatenachse in einem nach oben offenen Bogen entfernen, müßte auf der reellen Achse ihren größten Abstand vom Nullpunkt in der Resonanzfrequenz erreichen und sich dem Nullpunkt längs der Ordinatenachse von unten nähern. Da die Ortskurve diese typische Form nicht hat, scheiden Resonanzeffekte zur Erklärung des Frequenzganges aus, auch wenn man sie sich stark gedämpft vorstellt. Die Hauptursache des Frequenzganges bilden vielmehr Relaxationen mit sehr geringer Streuung der Zeitkonstanten.

Dagegen zeigt die Ortskurve Resonanzeffekte von untergeordneter Bedeutung sehr wohl.

4. Die elektrische Resonanz des Ferrit-Ringes.

Abb. 3 zeigt den Kehrwert der komplexen Permeabilität. Wäre die Ortskurve der komplexen Permeabilität genau ein Halbkreis, dann müßte der Kehrwert als Ortskurve eine zur Abszissenachse parallele Gerade haben. Weil zufolge der Streuung der Zeitkonstanten die Ortskurve der komplexen Permeabilität innerhalb des Halbkreises verläuft, steigt die Ortskurve des Kehrwertes oberhalb 1 MHz ein wenig an.

Die Komponente $\frac{1}{\mu_{LP}}$ hat bei 0,7 MHz ein flaches Minimum. Man führt dieses Minimum auf die Wirkung kapazitiver Wirbelströme zurück, die in Ferritkernen fließen. Man kann leicht zeigen, daß sich Ortskurven solcher Form nicht erklären lassen, wenn man annimmt, daß die Dielektrizitätskonstante des

Ferrits von der Frequenz unabhängig ist. Leider ist die Theorie der kapazitiven Wirbelströme für den Fall frequenzabhängiger Dielektrizitätskonstanten

noch nicht entwickelt, so daß wir nicht sagen können, ob sich die Form unserer Ortskurve wirklich durch kapazitive Wirbelströme erklären läßt.

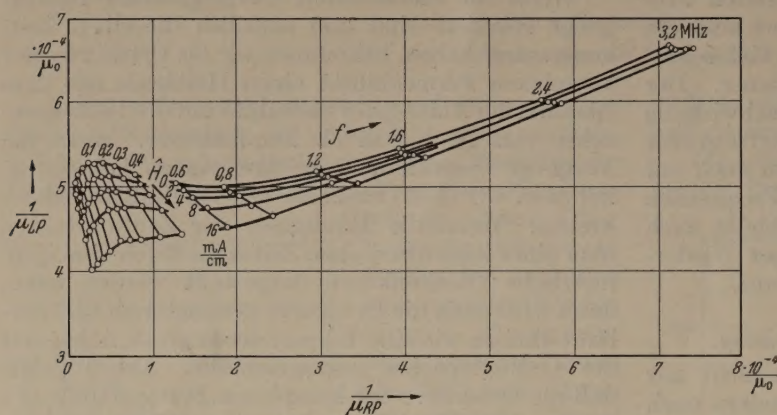


Abb. 3. Der Kehrwert der komplexen Permeabilität von Siferit 2000.

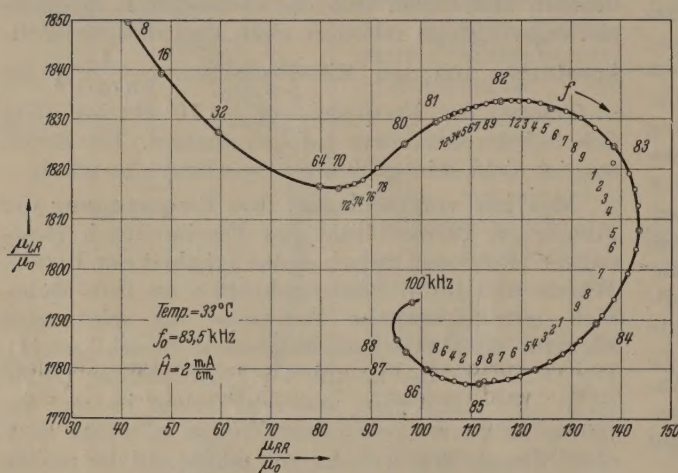


Abb. 4. Die komplexe Permeabilität von Siferit 2000 in der Umgebung der mechanischen Radialschwingungs-Resonanz, gemessen mit einer Wechselfeldstärke von $2 \frac{\text{mA}}{\text{cm}}$.

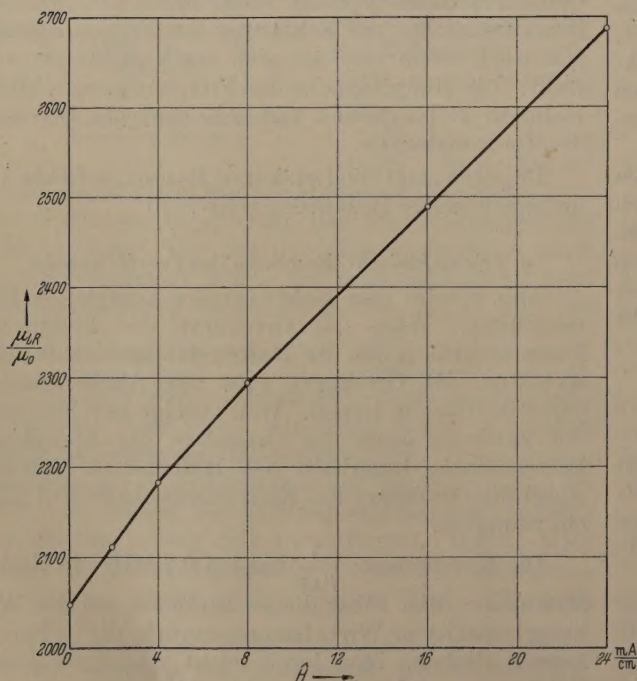


Abb. 5. Die Induktivitäts-Permeabilität von Siferit 2000 bei 4 Hz in Abhängigkeit von der Amplitude der Wechselfeldstärke.

5. Die mechanische Resonanz des Ferrit-Ringes.

Abb. 4 zeigt einen Ausschnitt der Ortskurve der komplexen Permeabilität mit sehr dichten Meßpunkten in der Umgebung von 83,5 kHz. Die Ortskurve beschreibt hier eine kleine Schleife. Hierin zeigt sich die mechanische Resonanz des Ferritringes, der Radialschwingungen ausführt [2]. Sie werden durch das Wechselfeld magnetostriktiv angeregt, weil Reste eines remanenten Gleichfeldes vorhanden sind. Die Dämpfung dieser Resonanz ist zum Teil durch die mechanische Dämpfung des Ferritringes gegeben, zum größeren Teil durch die aufgebrachte Wicklung und durch die Lagerung des Ringes beim Messen. Durch ein magnetisches Gleichfeld kann man den remanenten Magnetismus und damit den Durchmesser der Schleife der Ortskurve vergrößern, durch ein geeignetes Gegenfeld kann man aber auch die Remanenz beseitigen und damit die Schleife der Ortskurve zum Verschwinden bringen. Die Schleife der Ortskurve verschwindet auch nach einer sehr sorgfältigen, mit sehr großen Wechselfeldstärken beginnenden Entmagnetisierung.

6. Hysterese.

Abb. 5 zeigt die Abhängigkeit der Permeabilität von der Amplitude der Wechselfeldstärke bei tiefen Frequenzen. Wie bei vielen hochpermeablen Blechen findet man statt des linearen Anstieges, den das RAYLEIGH-Gesetz verlangt, eine Kurve, die im Beginn steiler ist als im weiteren Verlauf. Auch die Größe dieser Abweichung vom RAYLEIGH-Gesetz entspricht den dort vorkommenden Werten.

Abb. 2 läßt die Abhängigkeit der Hysterese von der Frequenz im Bereich von 4 Hz bis 100 kHz erkennen.

Die Kurven konstanter Frequenz sind, wie erwartet, Geraden. Das RAYLEIGH-Gesetz verlangt, daß diese Geraden gegen die Ordinatenachse um 23° geneigt sind. Man findet bei tiefen Frequenzen Winkel von nur 18° . Solche Winkel und auch noch kleinere sind bisher nur bei Silizium-haltigem Transformatorenblech, das geringe Mengen von gelöstem Kohlenstoff enthält, beobachtet worden. Der gelöste Kohlenstoff äußert sich bei solchen Blechen nicht nur in Hysteresewinkeln weit unter 23° , sondern auch in einem beschleunigten Anstieg der Permeabilität mit der Amplitude der Feldstärke. Der gelöste Kohlenstoff verhindert die besonders leichten Barkhausensprünge und läßt die Hysterese erst bei Feldstärken über einigen $\frac{\text{mA}}{\text{cm}}$ einsetzen. Das untersuchte Ferrit zeigt im Gegensatz dazu den kleinen Hysteresewinkel von 18° zusammen mit einem verzögerten An-

tie der Permeabilität mit der Feldstärke, also gerade einer gewissen Bevorzugung der leichten Barkausensprünge.

Noch auffallender ist, daß sich dieser Winkel mit der Frequenz stark ändert. Bei 100 kHz ist er bereits auf 41° angewachsen. Abb. 1 zeigt, daß er bei 0,7 MHz etwa 90° beträgt und bei höheren Frequenzen sogar noch größer wird, so daß die Induktivitäts-Permeabilität mit wachsender Amplitude der Wechselfeldstärke abnimmt statt zunimmt. Dieses

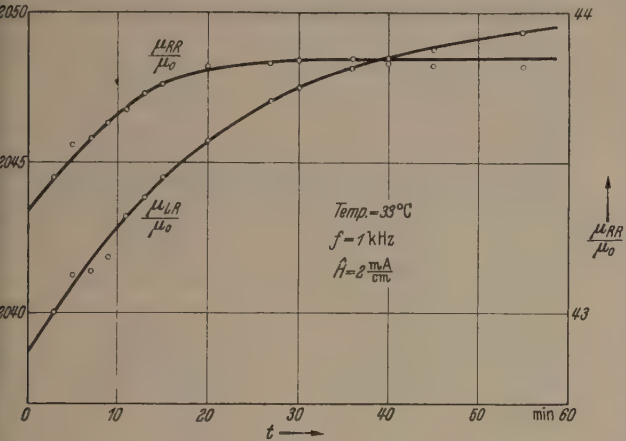


Abb. 6. Das Kriechen der Induktivitäts-Permeabilität μ_{LR} und der Widerstands-Permeabilität μ_{RR} von Siferit 2000 bei einer Frequenz von 1 kHz und einer Feldstärke von $2 \frac{\text{mA}}{\text{cm}}$.

Paradoxon verschwindet, wenn man den Kehrwert der komplexen Permeabilität, Abb. 3, statt der komplexen Permeabilität selbst betrachtet. Hier nimmt der Winkel, den die Kurven konstanter Frequenz mit der Ordinatenachse bilden, von 18° nur auf 90° zu und überschreitet diese Grenze nicht.

Mit dieser Erkenntnis ist die Frage nach einem geeigneten Maß für die Hysterese gestellt. Auch bei ferromagnetischen Blechen hatte sich gezeigt, daß die Abhängigkeit des Kehrwertes der Permeabilität von der Amplitude der Induktion oder der Feldstärke ein besseres Maß für die Hysterese ist als die Abhängigkeit der Permeabilität selbst [3].

Die Kurven der Abb. 3 zeigen also, daß auch die Hysterese relaxiert ist, und zwar ist die mittlere Zeitkonstante etwa $\frac{1}{2\pi \cdot 0,5 \cdot 10^8} \text{ sec} = 300 \text{ nsec}$, denn bei 0,5 MHz etwa hat der Hysteresewinkel auf 45° zugenommen. Die mittlere Zeitkonstante der Hysterese ist also wesentlich größer als die mittlere Zeitkonstante von 80 nsec der Hauptrelaxation [4].

7. Kriechen.

Wenn man Transformatorblech abmagnetisiert und danach längere Zeit ruhen läßt, und wenn man

dann plötzlich in ihm ein Wechselfeld mäßiger Amplitude erregt, dann nimmt die Induktion nicht sofort die stationäre Amplitude an, sondern erreicht sie kriechend. Solches Kriechen beobachtet man auch bei dem untersuchten Ferrit. Abb. 6 zeigt, wie die Induktivitäts-Permeabilität des untersuchten Ni-Zn-Ferrits in der ersten Stunde nach Einschalten des Wechselfeldes um 0,5% wächst und wie dieses Anwachsen selbst nach einer Stunde noch nicht aufgehört hat. Die Widerstands-Permeabilität wächst gleichzeitig um 1%, aber ihr Anwachsen hört bereits nach einer halben Stunde auf.

Wie Abb. 7 zeigt, bewegt sich während des Kriechens die komplexe Permeabilität praktisch parallel zur Ordinatenachse. Wenn man die innerhalb der ersten Stunde durchlaufene Strecke in die Abb. 2 einträgt, so erkennt man, daß man den Ablauf des Kriechens bei der Messung der komplexen Permeabilität abwarten muß, wenn man aus den Meßergebnissen zuverlässige Schlüsse auf die JORDAN-Nachwirkung und auf den Hysteresewinkel ziehen will.

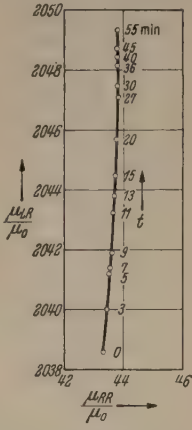


Abb. 7. Das Kriechen der komplexen Permeabilität von Siferit 2000 bei einer Frequenz von 1 kHz und einer Feldstärke von $2 \frac{\text{mA}}{\text{cm}}$.

Zusammenfassung.

Die Form der Ortskurve eines hochpermeablen Ferrits wird vorwiegend durch den Haupt-Relaxationseffekt der Ferrite bestimmt und in Einzelheiten durch die JORDAN-Nachwirkungen, die elektrische und die mechanische Resonanz des Ringkernes und durch die Hysterese. Die Hysterese erweist sich ebenfalls als relaxiert und hat eine Zeitkonstante, die viermal so groß als die Zeitkonstante des Haupt-Relaxationseffektes der Permeabilität ist.

Literatur. [1] SNOECK, J. L.: Physica 14, 207 (1948). — DÖRING, W.: Z. Naturforschung 3a, 373 (1948) u. 4a, 605 (1949). — KORNETZKI, M.: Z. angew. Physik 3, 5 (1951). — [2] WEIS, A.: Elektrotechnik 5, 213 (1951). — SIXTUS, K.: Frequenz 5, 335 (1951). — [3] FELDTKELLER, R.: Spulen und Übertrager, Stuttgart 1949, 2. Aufl. Teil I, S. 144, 145. — [4] WIJN, H. P. und J. J. WENT: Physica 17, 976 (1951). — [5] FELDTKELLER, R. u. H. HETTICH: Z. angew. Physik 2, 494 (1950). — EINSELE, TH. u. F. BAUR: Z. angew. Physik 3, 373 (1951).

Prof. Dr. RICHARD FELDTKELLER und
Dipl.-Phys. OTTO KOLB,

Institut für elektrische Nachrichtentechnik
der T. H. Stuttgart.

Der elliptische Hohlring unter axialer Last.

Von LUDWIG FÖPPL, München.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 31. Juli 1952.)

1. Die maßgebenden Größen.

Abb. 1 zeigt einen Achsenschnitt durch den elliptischen Hohlring. Die Belastung sei eine Drucklast, die sich über den oberen und unteren Ringkreis von $2\pi r_0$ Länge gleichmäßig verteilen soll. Wird die auf die Längeneinheit bezogene Druckkraft mit P bezeichnet, so beträgt die gesamte Last

$$Q = 2\pi r_0 \cdot P. \quad (1)$$

Unsere Aufgabe soll darin bestehen, die durch Q im Hohlring hervorgerufene elastische Beanspruchung anzugeben.

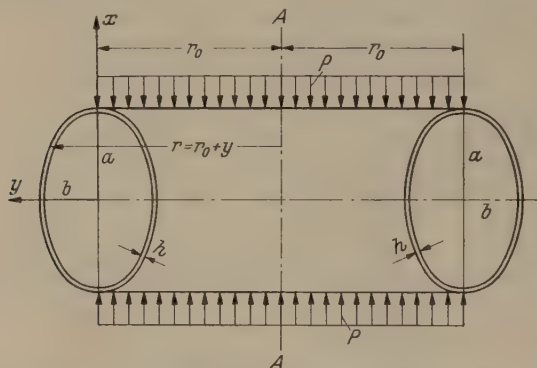


Abb. 1. Elliptischer Hohlring unter gleichmäßig verteiltem axialem Druck.

Da der beanspruchte Körper ebenso wie die Belastung zur Achse $A A$ symmetrisch ist, so gilt dies auch für die Spannungen und Formänderungen. Es genügt daher, wenn wir uns durch zwei benachbarte Meridianschnitte, die den Winkel $d\varphi$ einschließen, ein Ringelement herausgeschnitten denken und dafür das Gleichgewicht und die Spannungen sowie die Formänderungen ermitteln. Der zu einem solchen Ringelement gehörige Anteil der Druckkraft beträgt $P \cdot r_0 \cdot d\varphi$. Wir wollen alle Größen auf den Einheitswinkel beziehen, so daß $d\varphi = 1$ zu setzen ist.

Die Gleichung der Schnittellipse lautet (siehe Abb. 1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \beta \\ y &= b \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Das Linienelement der Ellipse schreibt sich dann

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = S \cdot d\beta \quad (4)$$

mit

$$S = \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}. \quad (5)$$

Wir denken uns den elliptischen Ring durch den Kreiszyylinder vom Radius r_0 in zwei Teilringe zerlegt: den äußeren und den inneren Teilring (siehe Abb. 2a und b). Dabei wird auch die längs der Scheitelkreise angreifende äußere Belastung geschnitten, wobei die zum äußeren Teilring gehörende Last, bezogen auf den axialen Einheitswinkel, $n \cdot P \cdot r_0$ betragen möge, während auf den inneren Ring der Anteil $n_1 \cdot P r_0$ treffen soll. Da beide zusammen gleich

der gegebenen Last $P r_0$ sein müssen, ist $n + n_1 = 1$ zu setzen. Das Verhältnis n/n_1 ist die erste statisch unbestimmte Größe unserer Aufgabe.

Die in Abb. 2a und 2b eingetragenen, in den Scheitelkreisen übertragenen Normalkräfte $N_0 \cdot r_0$ verlangen aus Gleichgewichtsbedingungen Ringspannungen σ_t , die wir mit der Wandstärke h multipliziert mit T bezeichnen wollen. Man kann zeigen [1], daß sie über die Ellipsenhälften konstant sein müssen. Da die Resultierende dieser Tangentialkräfte T über den ganzen Ellipsenumfang summiert null sein muß, sind sie für den äußeren und inneren Teilring gleich groß, aber von entgegengesetzten Vorzeichen. Aus dem Gleichgewicht des zu $d\varphi = 1$ gehörenden Sektors sowohl des äußeren Teilringes nach Abb. 2a wie des inneren nach Abb. 2b in Richtung senkrecht zur Ringachse $A A$ folgt:

$$\frac{1}{2} T \cdot U = 2 N_0 r_0, \quad (6)$$

wobei U den Umfang der Ellipse bedeutet. Da beim Übergang vom äußeren Teilring zum inneren $N_0 \cdot r_0$ seine Richtung ändert (siehe Abb. 2a und b), so gilt dies auch für die Tangentialkraft T nach vorstehender Gleichung. Dies steht in Übereinstimmung mit der oben schon erwähnten Gleichgewichtsbedingung, daß die Resultierende aller Tangentialkräfte T über den ganzen Umfang der Ellipse null sein muß.

Nachdem wir die äußere Druckbelastung des Ringes $P \cdot r_0$ als positiv angesetzt haben, ist die in Abb. 2a und 2b eingetragene Längsspannung $N_0 \cdot r_0$ tatsächlich keine Zugspannung, sondern eine in Wirklichkeit entgegengesetzt gerichtete Druckspannung; alsdann sind die im äußeren Ringteil angreifenden Ringspannungen T Zugspannungen, während die entsprechenden Spannungen des inneren Ringteiles Druckspannungen von gleicher Größe sind. Die Zugspannungen T im äußeren und die Druckspannungen $-T$ im inneren Teilring lassen sich anschaulich durch die mit der axialen Zusammendrückung des ganzen Ringes durch die äußere Belastung erklären. Während die zum äußeren Ringteil gehörigen Ringfasern nach außen gedrückt und damit verlängert werden, gilt das Umgekehrte für die zum inneren Ringteil gehörenden Ringfasern, die nach innen gedrückt und damit verkürzt werden.

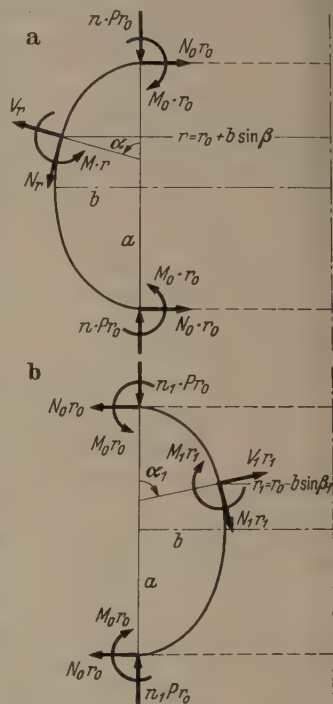


Abb. 2. Äußere und innere Hälfte des elliptischen Meridianschnittes.

Die im Scheitelschnitt übertragene Längsspannung N_0 ist die zweite statisch Unbestimmte und das im gleichen Schnitt übertragene Moment M_0 die dritte statisch unbestimmte Größe unsrer Aufgabe.

2. Die Gleichgewichtsgleichungen.

Für die in Abb. 2a an einer beliebigen Stelle der Ellipse eingetragenen Spannungsergebnisse $N \cdot r$, $V \cdot r$ und $M \cdot r$ gelten die folgenden Gleichgewichtsbedingungen für den Ellipsenbogen s , der zu $\alpha = 0$ bis α gehört:

$$\left. \begin{aligned} N \cdot r \cos \alpha + V \cdot r \sin \alpha &= N_0 r_0 - T \cdot s \\ N \cdot r \sin \alpha - V \cdot r \cos \alpha &= -n P r_0 \\ M \cdot r &= M_0 r_0 + N_0 r_0 (a - x) + n P r_0 - T \cdot s \cdot \xi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die in der letzten Gleichung auftretende Größe ξ bedeutet den Abstand des Schwerpunktes des Ellipsenbogens s von der durch den Aufpunkt gezogenen Parallelen zur y -Achse.

Aus den beiden ersten Gl. (7) folgt:

$$\left. \begin{aligned} N \cdot r &= (N_0 r_0 - T \cdot s) \cos \alpha - n P r_0 \sin \alpha \\ V \cdot r &= (N_0 r_0 - T \cdot s) \sin \alpha + n P r_0 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dazu tritt die dritte Gl. (7) zur Berechnung des Momentes:

Beachten wir noch den Zusammenhang zwischen dem in obigen Gleichungen auftretenden Winkel α , der auch in Abb. 2a eingetragen ist, und dem Winkel β für die Ellipsenkoordinaten x und y nach Gl. (3):

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{S} \sin \beta \\ \cos \alpha &= \frac{b}{S} \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

so erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (6)

$$N \cdot r = N_0 r_0 \left(1 - 4 \frac{s}{U}\right) \frac{b}{S} \cos \beta - n P r_0 \frac{a}{S} \sin \beta, \quad (10a)$$

$$V \cdot r = N_0 r_0 \left(1 - 4 \frac{s}{U}\right) \frac{a}{S} \sin \beta + n P r_0 \frac{b}{S} \cos \beta, \quad (10b)$$

$$M \cdot r = M_0 r_0 + N_0 r_0 a (1 - \cos \beta) + n P r_0 b \sin \beta - 4 N_0 r_0 \frac{s}{U} \cdot \xi; \quad (10c)$$

$$\text{wobei} \quad s \cdot \xi = a \int_{\beta'=0}^{\beta'= \beta} \cos \beta' \cdot S d\beta' - s \cdot a \cdot \cos \beta. \quad (11)$$

Die entsprechenden Gleichgewichtsgleichungen für den inneren Teilring kann man an Abb. 2b ablesen. Um auch äußerlich zwischen den obigen Gleichgewichtsgleichungen für den äußeren Teilring und denen für den inneren zu unterscheiden, sind bei letzterem die veränderlichen Größen durch den Index 1 gekennzeichnet (siehe Abb. 2b). Für den von $\alpha_1 = 0$ bis α_1 sich erstreckenden Ellipsenbogen gelten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} N_1 r_1 \cos \alpha_1 + V_1 r_1 \sin \alpha_1 &= N_0 r_0 - T \cdot s_1 \\ N_1 r_1 \sin \alpha_1 - V_1 r_1 \cos \alpha_1 &= -n_1 P r_0 \\ M_1 r_1 &= M_0 r_0 + N_0 r_0 a (1 - \cos \beta_1) \\ &\quad + n_1 P r_0 b \sin \beta_1 - T \cdot s_1 \cdot \xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Da diese Gleichungen mit den Gl. (7) übereinstimmen bis auf die Indices 1, die den inneren Teilring kenn-

zeichnen sollen, so können wir die im Anschluß an die Gl. (7) angestellten Überlegungen übernehmen, so daß an Stelle der Gl. (10), die sich auf den äußeren Teilring beziehen, die folgenden, für den inneren Teilring gültigen Gleichgewichtsbedingungen ohne weiteres angegeben werden können:

$$N_1 r_1 = N_0 r_0 \left(1 - 4 \frac{s_1}{U}\right) \frac{b}{S_1} \cos \beta_1 - n_1 P r_0 \frac{a}{S_1} \sin \beta_1 \quad (13a)$$

$$V_1 r_1 = N_0 r_0 \left(1 - 4 \frac{s_1}{U}\right) \frac{a}{S_1} \sin \beta_1 + n_1 P r_0 \frac{b}{S_1} \cos \beta_1 \quad (13b)$$

$$M_1 r_1 = M_0 r_0 + N_0 r_0 a (1 - \cos \beta_1) + n_1 P r_0 b \sin \beta_1 - 4 N_0 r_0 \frac{s_1}{U} \cdot \xi_1 \quad (13c)$$

mit:

$$s_1 \xi_1 = a \cdot \int_{\beta'_1=0}^{\beta'_1=\beta_1} \cos \beta'_1 S_1 \cdot d\beta'_1 - a s_1 \cos \beta_1. \quad (14)$$

Damit sind alle Gleichgewichtsbedingungen der Aufgabe angegeben.

3. Die Berechnung der statisch unbestimmten Größen.

Wie schon in Abschnitt I erwähnt, ist die Aufgabe 3fach statisch unbestimmt und zwar sind die statisch unbestimmten Größen, die in den Gleichgewichtsgleichungen (10) (13) auftreten, die Spannungsergebnisse N_0 bzw. M_0 und das Verhältnis n/n_1 in dem sich die äußere Belastung $P_0 \cdot r_0$ auf den äußeren bzw. inneren Teilring verteilt. Zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen muß man auf die elastische Formänderung eingehen.

Da die y -Achse des Ellipsenschnittes Symmetrieachse ist, muß dieser Schnitt bei der Belastung in seiner Ebene bleiben. Infolgedessen muß die Summe der Verbiegungen der einzelnen Elemente ds der Ellipse für die auf einer Seite des Symmetrieschnittes gelegene Halbellipse null sein. Für jede der beiden Ellipsenquadranten, in die die Halbellipse zerfällt, gilt dasselbe, weil längs der Belastungslinie im Scheitel der Halbellipse die Last $P \cdot r_0$ sich in einem bisher noch unbekannten Verhältnis n/n_1 auf die dort zusammenstoßenden Ellipsenquadranten so verteilt, daß auch der Scheitelschnitt der Ellipse keine Drehung erleidet, sondern in seiner Ebene bleibt, was ja eine Voraussetzung für den Scheitel bedeutet. In Formeln ausgedrückt bedeutet dies

$$\int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{M \cdot r}{E I} ds = 0. \quad (15)$$

Setzt man hierin

$$I = r \frac{h^3}{12}, \quad (16)$$

so erhält man:

$$\int_{\beta=0}^{\pi/2} M ds = 0. \quad (17)$$

M ist hierin durch seinen Wert aus Gl. (10 c) zu ersetzen.

Für den zweiten Ellipsenquadranten erhält man dementsprechend:

$$\int_{\beta_1=0}^{\pi/2} M_1 ds_1 = 0, \quad (18)$$

worin M_1 durch seinen Wert aus Gl. (13 c) zu ersetzen

ist. Damit folgt aus Gl. (17)

$$M_0 = \frac{1}{I_1} \left[N_0 a \left(4 \frac{b}{U} I_4 - I_2 \right) - n P b \cdot I_3 \right] \quad (19)$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{ds}{r}; & I_2 &= \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{1 - \cos \beta}{r} ds; \\ I_3 &= \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{r} ds; & I_4 &= \frac{1}{a b} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{s \cdot \xi}{r} ds. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Ebenso geht aus Gl. (18) hervor:

$$M_0 = \frac{1}{I'_1} \left[N_0 a \left(4 \frac{b}{U} I'_4 - I'_2 \right) - n_1 P b I'_3 \right] \quad (21)$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{ds_1}{r_1}; & I'_2 &= \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{1 - \cos \beta_1}{r_1} ds_1; \\ I'_3 &= \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta_1}{r_1} ds_1; & I'_4 &= \frac{1}{a b} \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{s_1 \cdot \xi_1}{r_1} ds_1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Neben den Gl. (19) und (21) erhält man als dritte Gleichung zur Berechnung der drei statisch unbestimmten Größen die folgende, die die Formänderungsbedingung zum Ausdruck bringt, daß die mit der Verbiegung des linken Teilrings verbundene Verkürzung des Ellipsendurchmessers $2a$ ebenso groß sein muß, wie die des rechten Teilrings:

$$\int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{M \cdot r}{E \cdot I} b \sin \beta \cdot ds = \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{M_1 r_1}{E I_1} b \sin \beta_1 ds_1. \quad (23)$$

Nach Einsetzen der Werte für $M \cdot r$ und $M_1 \cdot r_1$ aus den Gl. (10 c) und (13 c) geht die letzte Gleichung über in

$$\left. \begin{aligned} M_0 \cdot (I_3 - I'_3) &= 4 \frac{N_0}{U \cdot a b} (I_4 - I'_4) \\ &- N_0 a (I_3 - I'_3 - I_5 + I'_5) \\ &- P b (n \cdot I_6 - n_1 \cdot I'_6), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

mit den neuen Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} I_5 &= \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta \cos \beta}{r} ds; & I_6 &= \int_{\beta=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta}{r} ds; \\ I'_5 &= \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{\sin \beta_1 \cos \beta_1}{r_1} ds_1; & I'_6 &= \int_{\beta_1=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta_1}{r_1} ds_1. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Damit ist die Aufgabe bis auf Quadraturen als gelöst anzusehen.

Sonderfälle.

Zunächst wollen wir den Sonderfall des geraden Rohres von elliptischem Querschnitt behandeln, das längs der Scheitellinie eine gleichmäßig verteilte Last aufzunehmen hat, der eine ebensolche Auflagerung entspricht. Dieser Fall wird aus dem bisher behandelten allgemeinen Fall des axial gedrückten elliptischen Ringes dadurch erhalten, daß man mit r und r_0 zur Grenze $\lim r \rightarrow \infty$ und $\lim r_0 \rightarrow \infty$ übergeht. Man sieht sofort, daß von den drei statisch unbestimmten

Größen nur eine übrig bleibt; denn es wird

$$n = n_1 = \frac{1}{2},$$

so daß sich die Drucklast P gleichmäßig auf beide Ringhälften verteilt; ferner ist die im allgemeinen Fall statisch Unbestimmte N_0 in diesem Sonderfall gleich null und damit verschwinden auch die Tangentialkräfte T . Das Biegemoment M_0 ist die einzige statisch Unbestimmte. Die Gl. (10), die mit der Gl. (13) beim geraden elliptischen Rohr vollkommen übereinstimmen, gehen über in:

$$N = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a}{S} \sin \beta, \quad (26 a)$$

$$V = \frac{P}{2} \cdot \frac{b}{S_1} \cos \beta, \quad (26 b)$$

$$M = M_0 + \frac{P}{2} b \sin \beta. \quad (26 c)$$

Von den drei Gleichungen für die statisch Unbestimmten verschwindet Gl. (24) identisch und die Gl. (19) und (21) ergeben die gleiche Aussage, woraus sich M_0 in Gl. (26 c) folgendermaßen berechnen läßt:

$$M_0 = -\frac{P}{2} b \cdot \frac{I_3}{I_1} = -\frac{2P}{U} \cdot \int_{\beta=0}^{\pi/2} y ds = -\frac{P}{2} \cdot y_s, \quad (27)$$

wobei

$$y_s = \frac{2}{U} \cdot \int_{\beta=0}^{\pi} y ds$$

den Abstand des Schwerpunktes der Halbellipse ($\beta = 0$ bis $\beta = \pi$) von der x -Achse bedeutet.

Indem man diesen Wert von M_0 in Gl. (26 c) einsetzt, ist der Spannungszustand im geraden elliptischen Rohr bei gleichmäßiger Scheitelbelastung durch die Gl. (26) festgelegt.

Die Aufgabe ist damit gelöst.

Für den Fall des kreisförmigen Rohres mit $a = b$ bei entsprechender Belastung nimmt y_s in Gl. (27) den Wert $\frac{2}{\pi} a$ an und damit M_0 den bekannten Wert $-\frac{Pa}{\pi}$.

Der eben behandelte Sonderfall des geraden Rohres liefert den durch die Gl. (26) und (27) wieder gegebenen Spannungszustand als strenge Lösung. Diese Lösung ist auch noch als gute Näherung für große Ringe zu brauchen, für die $\frac{a}{r_0}$ und $\frac{b}{r_0}$ als kleine Zahlen anzusehen sind. In diesem Fall kann man die Veränderlichen r , bzw. r_1 wie sie in den Integralen der Gl. (20), (22) und (25) auftreten, durch die Konstanten r_0 ersetzen. Wie sich an Hand der Gl. (10), (13), (21) und (24) leicht nachweisen läßt, führt diese Näherung auf die Gl. (26) und (27) des geraden Rohres zurück.

Für den Fall, daß r_0 dieselbe Größenordnung wie die Ellipsenhalmmesser a und b besitzt, muß auf die allgemein gültigen Gleichungen der vorhergehenden Abschnitte zurückgegriffen werden. Diese letzteren Gleichungen lassen sich vereinfachen durch den Ansatz:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{b}{r_0^2} \sin \beta; \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0} + \frac{b}{r_0^2} \sin \beta_1$$

Auf diese Näherung, die einem Ring mittlerer Größe

wo $\frac{a}{r_0}$ und $\frac{b}{r_0}$ als klein, wenn auch nicht als sehr klein anzusehen sind, entspricht, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Zusammenfassung.

Es wird der elastische Spannungszustand in einem elliptischen Hohlring von geringer Wandstärke, der

unter axialem, gleichmäßig verteiltem Druck steht, untersucht. Die Aufgabe ist dreifach statisch unbestimmt.

Literatur. [1] FÖPPL, L.: Spannungen und Formänderungen von Ringschalen mit elliptischem Meridianschnitt. Sitzungsberichte der Bayr. Akademie der Wissenschaften, S. 75 (1952).

Prof. Dr. LUDWIG FÖPPL,
Lehrstuhl für Techn. Mechanik der T. H. München.

Berechnung der Temperaturverteilung beim autogenen Brennschneiden.

Von PETER GRASSMANN, Zürich.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 1. August 1952.)

Stärkere Stahlbleche werden heute fast ausschließlich autogen geschnitten [1], [2]. Dabei wird auf das lokal bis zur Entzündungstemperatur erhitze Blech ein möglichst engbegrenzter Sauerstoffstrahl gerichtet. Dort, wo dieser „Schneidstrahl“ das Werkstück trifft, verbrennt der Stahl und die flüssige Schlacke wird durch die Gewalt des Schneidstrahls aus der Schnittfuge herausgeblasen. Die durch die Verbrennung des Stahls erzeugte Wärme ist dabei so groß, daß sie genügt, das benachbarte Material gleichfalls auf Entzündungstemperatur zu bringen, so daß bei kontinuierlichem Vorschub des Brenners — der am zweckmäßigsten durch eine entsprechende Schneidmaschine erfolgt — ein fortlaufender, sauberer Schnitt entsteht. Die zulässigen Maßabweichungen werden bei Schnittlänge bis zu 1 m zu ± 1 mm, die Tiefe der Schnittriefen bei 10 mm starkem Blech zu 0,2 mm angegeben [2], jedoch lassen sich unter günstigen Verhältnissen die Maßabweichungen bis auf wenige Zehntel, die Tiefe der Schnittriefen auf 0,03—0,05 mm erniedrigen¹.

Damit das Verfahren durchführbar ist, muß, neben anderen Bedingungen, denen eine frühere Arbeit [3] gewidmet war, auch ein wohlabgewogenes Gleichgewicht zwischen der Wärmezufuhr — im wesentlichen gegeben durch die pro Zeiteinheit verbrannte Stahlmenge — und der Wärmeabfuhr — bei dicken Blechen zum überwiegenden Teil gegeben durch die Wärmeleitung im Blech — bestehen. Um diese Bedingung zu formulieren, muß man die Gleichung des Temperaturfeldes in einer leitenden Platte aufstellen, durch die mit konstanter Geschwindigkeit eine lineare Wärmequelle, deren Achse senkrecht zur Plattenebene steht, hindurchbewegt wird. (Für einen etwas ähnlichen Fall, nämlich für eine punktförmige Wärmequelle, die längs der Oberfläche einer wärmeleitenden Platte bewegt wird, wurde das Temperaturfeld von E. MADELUNG [5] berechnet.) Die Lösung dieser Aufgabe gibt dann gleichzeitig auch Antwort auf die Frage nach den auftretenden Höchsttemperaturen und den Erwärmungs- und Abkühlgeschwindigkeiten, gegeben in verschiedenen Abständen von der Schnittlinie. Auch ihre Kenntnis ist praktisch wichtig, weil man damit beurteilen kann, bis zu welchen Abständen vom Schnitt eine Gefügeänderung des Materials, Aushärtvorgänge und dergleichen ein-

treten. Ferner wird durch die Rechnung auch die bekannte Tatsache, daß die Vorschubgeschwindigkeit des Brenners nur innerhalb bestimmter Grenzen verändert werden kann, quantitativ dargestellt: Bei zu geringer Vorschubgeschwindigkeit ist die pro Zeiteinheit verbrannte Stahlmenge zu gering, um die Wärmeverluste zu decken; bei zu hoher Vorschubgeschwindigkeit werden die Temperaturgradienten im Blech so hoch, daß trotz großer Wärmeproduktion pro Zeiteinheit auch wieder die Ableitung der Wärme ihre Produktion überwiegt.

Nach den sorgfältigen Messungen von MALZ [4] lassen sich die einzelnen Wärmequellen und Wärmeverluste wenigstens näherungsweise angeben. Danach wird beim Schneiden eines 80 mm starken Stahlbleches durch das Verbrennen des Stahls eine Wärmemenge von 2810 kcal/m Vorschub frei, während die Vorwärmflamme nur 528 kcal/m zuführt. Die Breite des Schnittes beträgt dabei 3,45 mm, die Vorschubgeschwindigkeit 170 mm/min, also rund 10 m/h.

Diesen Wärmequellen stehen folgende Verluste entgegen:

1. die Wärmeableitung im Blech,
2. die Wärmeabstrahlung,
3. der Wärmeinhalt der abfließenden Schlacke (fühlbare Wärme + Schmelzwärme),
4. die fühlbare Wärme des aus der Schnittfuge austretenden unverbrannten Sauerstoffs des Schneidstrahls.

Die Wärmestrahlung fällt gegenüber der in der folgenden Rechnung allein berücksichtigten Wärmeleitung um so weniger ins Gewicht, je stärker das Blech ist. Menge und Zusammensetzung der Schlacke wurden zwar von MALZ genau gemessen, jedoch kann ihre spezifische und Schmelzwärme nur geschätzt werden. Danach beträgt ihre fühlbare Wärme etwa 500, ihre Schmelzwärme rund 110 kcal/m Vorschub. Falls der unverbrannte Sauerstoff des Schneidstrahls die Temperatur der schmelzenden Schlacke, also rund 1300° C, annimmt — wahrscheinlich ist seine Temperatur wesentlich niedriger — so entspräche das erst 375 kcal/m Vorschub. Danach scheint also wenigstens beim Schneiden stärkerer Bleche mindestens in erster Näherung die oben angegebene Idealisierung statthaft zu sein.

Unter dieser Voraussetzung hängt die Temperatur nicht von der Koordinate senkrecht zur Plattenebene, sondern nur von den beiden rechtwinkligen

¹ Private Mitteilung Herrn Dr. BECHTLES (Firma Messer G. m. b. H., Frankfurt a. M.).

Koordinaten x und y in der Plattenebene ab. Ist ϑ die Temperatur, t die Zeit, a die Temperaturleitfähigkeit des betreffenden Mediums — in diesem Falle des Stahls — so gilt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

Der Schneidstrahl, d. h. die Wärmequelle, bewege sich dabei mit der Geschwindigkeit w längs der Geraden $y=0$ in Richtung der positiven x -Achse.

Das Temperaturfeld $\vartheta(x, y)$ einer momentanen, d. h. während der Zeit dt Wärme liefernden, linearen Wärmequelle an der Stelle $x_t = w \cdot t$ ist dann gegeben durch

$$d\vartheta(x, y) = \frac{A}{t} e^{-\frac{(x-x_t)^2 + y^2}{4at}} \cdot dt. \quad (2)$$

Dabei ist

$$A = \frac{Q}{4\lambda\pi s}, \quad (3)$$

wobei Q die pro Zeiteinheit frei werdende Wärme, λ = Wärmeleitfähigkeit und s = Stärke der Platte ist. Das sich ergebende Temperaturfeld entsteht durch Überlagerung der Temperaturfelder dieser einzelnen momentanen Wärmequellen.

Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Teilfelder addiert werden. Es kann also bei der Integration mit t die *verflossene* Zeit bezeichnet werden. Ist also die Quelle seit der (verflossenen) Zeit $t = +\infty$ vom Ort $x_t = -\infty$ bis zur Zeit $t=0$ zum Ort $x=0, y=0$ gewandert, so ist das nun bestehende Temperaturfeld gegeben durch

$$\vartheta(x, y) = A \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{dt}{t} e^{-\frac{(x+wt)^2 + y^2}{4at}}. \quad (4)$$

Mit $\alpha = \frac{w^2}{4a}$ und $\beta = \frac{x^2 + y^2}{4a}$ folgt¹

$$\vartheta(x, y) = A e^{-\frac{wx}{2a}} \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{dt}{t} e^{-(\alpha t + \beta/t)} = A e^{-\frac{wx}{2a}} \cdot J(\alpha, \beta).$$

1. Substitution: $\ln t = u$ oder: $e^u = t; \frac{dt}{t} = du$

$$J(\alpha, \beta) = \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{dt}{t} e^{-(\alpha t + \beta/t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} du \cdot e^{-(\alpha e^u + \beta e^{-u})}.$$

2. Substitution: $\alpha e^u + \beta e^{-u} = b[e^u + \delta + e^{-(u+\delta)}]$.

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muß sein

$$\alpha \cdot e^u = b \cdot e^{u+\delta} \quad \text{oder} \quad \alpha = b \cdot e^\delta,$$

$$\beta \cdot e^{-u} = b \cdot e^{-(u+\delta)} \quad \text{oder} \quad \beta = b \cdot e^{-\delta}.$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$b = \sqrt{\alpha \cdot \beta}.$$

Division ergibt:

$$e^\delta = \alpha/\beta.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \alpha e^u + \beta e^{-u} &= \sqrt{\alpha \cdot \beta} [e^{u+\delta} + e^{-(u+\delta)}] \\ &= 2\sqrt{\alpha \cdot \beta} \cdot \cosh(u + \delta), \end{aligned}$$

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \cdot e^{-2\sqrt{\alpha\beta} \cosh(u+\delta)}.$$

3. Substitution: $v = u + \delta \quad dv = du$. Damit folgt:

$$J(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \cdot e^{-2\sqrt{\alpha\beta} \cosh v} = 2 \int_0^{+\infty} dv \cdot e^{-2\sqrt{\alpha\beta} \cosh v}.$$

Die HANKELSche Funktion H ist definiert durch [6]

$$i H_0^{(1)}(iz) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \cosh v} dv.$$

Also ist

$$J(\alpha, \beta) = \pi i H_0^{(1)}(i \cdot 2\sqrt{\alpha\beta}) \quad \sqrt{\alpha\beta} = \frac{w}{4a} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta(x, y) = A \cdot e^{-\frac{wx}{2a}} \cdot \pi i H_0^{(1)}\left(i \cdot \frac{w}{2a} \sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad (5)$$

Die Temperaturverteilung ist also ein Produkt der in x unsymmetrischen Exponentialfunktion und der radialsymmetrischen HANKELSchen Funktion.

Beim Brennschneiden ist Q und damit auch A der pro Zeiteinheit verbrannten Stahlmenge und damit der Vorschubgeschwindigkeit des Brenners proportional. Man kann also setzen:

$$Q = q \cdot w. \quad (6)$$

(Dabei ist q die pro m Brennvorschub erzeugte Wärme.)

Würde diese gesamte Wärme durch Wärmeleitung in der Platte abgeführt, so ergäbe sich also die Temperaturverteilung:

$$\vartheta(x, y) = \frac{q w}{2\pi \lambda s} \cdot e^{-\frac{wx}{2a}} \cdot \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}\left(i \frac{w}{2a} \sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad (7)$$

Für die Abschätzung der Temperatur in nächster Nähe des Schnittes ist das Verhalten der HANKELSchen Funktion für kleines Argument maßgebend. Nach JAHNKE-EMDE [6] kann hier gesetzt werden

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}\left(i \frac{w}{2a} \sqrt{x^2 + y^2}\right) = \ln \frac{4a}{1,7811 \cdot w \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (8)$$

Setzt man die Näherungslösung (8) in (7) ein, so ist die Abhängigkeit ϑ von w im Wesentlichen durch den Faktor $w \cdot e^{-wx/2a}$ bedingt. Die Temperatur in der Nähe des Schneidstrahls nimmt also bei wachsender Vorschubgeschwindigkeit zunächst zu, um dann nach Durchlaufen eines Maximums wieder auf Null abzunehmen. Da die Temperatur in der Nähe des Schneidstrahls über der Entzündungstemperatur des Stahls liegen muß, so entspricht dies der bekannten Tatsache, daß ein autogenes Schneiden nur innerhalb eines gewissen Vorschubbereichs möglich ist.

Für Stahl kann etwa mit $\lambda = 26 \text{ kcal/mh}^\circ \text{C}$ also mit einer Temperaturleitfähigkeit

$$a = \lambda/(c \cdot \gamma) = 26/(0,160 \cdot 7850) = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{h}$$

gerechnet werden.

Nimmt man an, daß die Wärmeabstrahlung von der Oberfläche des Blechs durch die Vorwärmflamme ausgeglichen wird, so bleiben für den oben bereits erwähnten speziellen Fall von den pro m Vorschub durch die Verbrennung des Stahls erzeugten 2810 kcal nach Abzug der durch den Schneidsauerstoff (375 kcal/m) und den durch die Schlacke fortgeführten Wärmemenge (620 kcal/m) noch rund 1815 kcal/m. Sie müssen durch die Wärmeleitung im Blech abgeführt werden. Damit ergibt sich dann

¹ Für die Angabe des Integrationsweges bin ich Herrn Prof. E. MADELUNG zu großem Dank verpflichtet.

mit $s=0,08$ für Gl. (7) in technischen Einheiten (m, h, kcal) Abstand d jenseits der Blechkante angebracht werden. Man erkennt dann leicht, daß die Isothermen des durch diese beiden Wärmequellen — also durch

$$\vartheta(x,y)=\frac{1815\cdot w}{2\pi\cdot 0,08\cdot 26}e^{-\frac{w\cdot x}{2\cdot 2,07\cdot 10^{-2}}}\times\frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}\left(i\frac{w}{2\cdot 2,07\cdot 10^{-2}}\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(9)

In Abb. 1 sind die so errechneten Temperaturverteilungen längs der Schnittlinie, also für $y=0$ für verschiedene Vorschubsgeschwindigkeiten aufgetragen. Wie aus Gl. (7) und (8) leicht zu erkennen, ist dabei $\vartheta(x,y)/w$ nur eine Funktion des Produktes $w\cdot x$ und der Materialkonstanten.

In Abb. 2 sind ferner die Isothermen in der x,y -Ebene für eine Schnittgeschwindigkeit von 10 m/h aufgetragen¹. Die Temperaturangaben sind dabei als Übertemperaturen über die ursprüngliche Blechtemperatur zu verstehen. Durch die bei Stahl mit hohem C-Gehalt oder bei komplizierten Werkstoffen übliche Vorwärmung der zu schneidenden Bleche werden sie also entsprechend erhöht. Es wird aber auch verständlich, daß Metalle mit hoher Wärmeleitfähigkeit, jedoch niedriger Verbrennungswärme — z. B. Kupfer — schon allein wegen der Schwierigkeit genügend hohe Temperaturen zu erzielen, nicht autogen geschnitten werden können. In speziellen Fällen können dem Schneidsauerstoff auch Pulver mit hoher Verbrennungswärme, z. B. Fe zugegeben werden [2], wodurch sich der Wert von Q in Gl. (6) erhöht.

Da die entstehende Schlacke bei rund 1400° schmelzen dürfte, müßte die maximale Breite der 1400° Isotherme (nach Abb. 2 4,1 mm) der Schnittbreite von 3,45 mm entsprechen. Die Abweichung ist durch die oben gemachten Vernachlässigungen sowie durch die ungenaue Kenntnis der phys. Konstanten von Stahl und Schlacke, besonders bei den in Frage kommenden hohen Temperaturen zu erklären.

Die Maximaltemperaturen in Abhängigkeit von y , d. h. des Abstandes von der Mittelebene des Schnitts gibt Abb. 3 wieder. Es kann daraus ersehen werden, bis zu welchen Entfernungen Gefügeänderung des Materials zu befürchten ist.

Bisher wurde angenommen, daß die x,y -Ebene unendlich ausgedehnt ist. Die Temperaturverteilung läßt sich aber auch für den Fall berechnen, daß der Schnitt im Abstand d längs einer Blechkante erfolgt. Dazu muß nämlich nur eine zweite Wärmequelle im

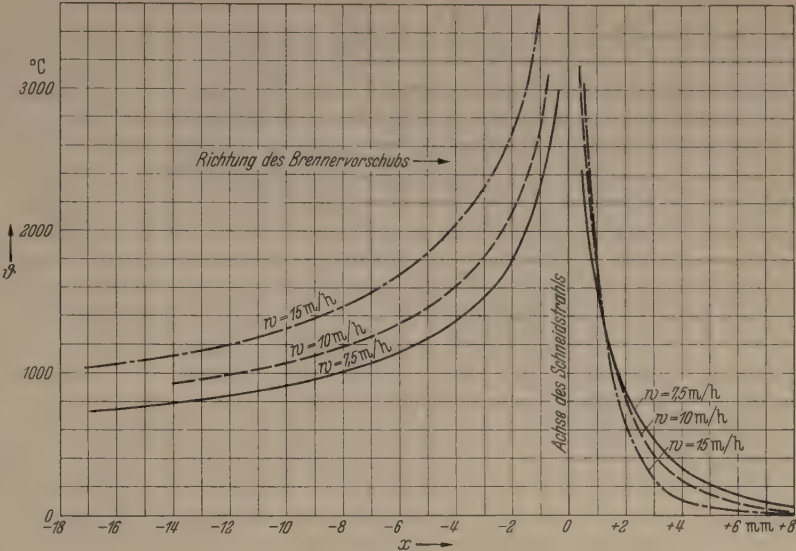


Abb. 1. Temperaturverteilung in der Schnitttrichtung für verschiedene Vorschubgeschwindigkeiten. Die Isothermen für Temperaturen über etwa 1500° haben für das Schneiden von Stahl keine Bedeutung mehr, können jedoch für das Schneiden schwerer schmelzbarer Legierungen Wichtigkeit erlangen.

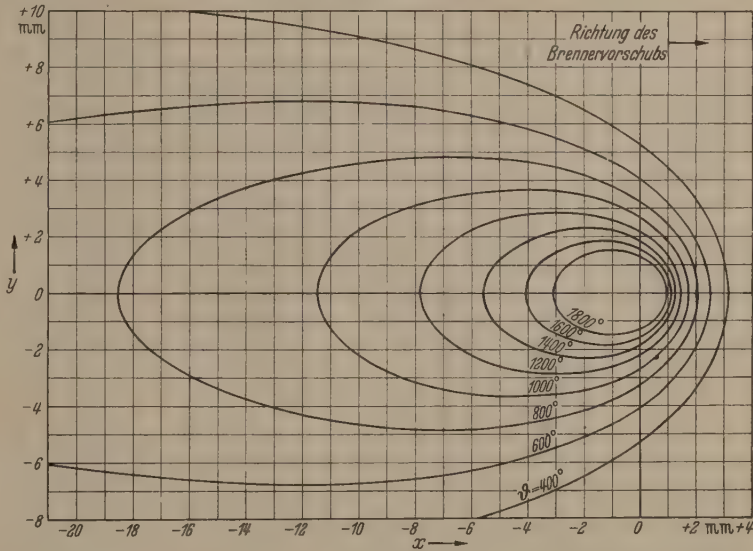


Abb. 2. Temperaturverteilung in der Blechebene für eine Vorschubgeschwindigkeit von 10 m/h.

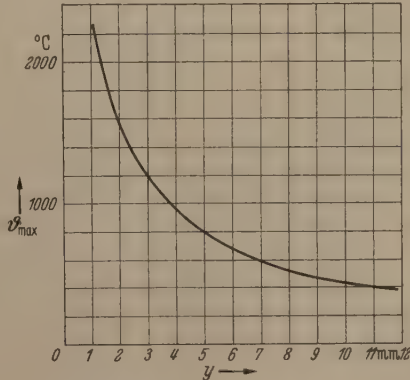


Abb. 3. Maximaltemperaturen bei einer Vorschubgeschwindigkeit von 10 m/h in Abhängigkeit vom Abstand von der Mittelebene des Schnitts.

¹ Für die zahlenmäßige Berechnung der Bilder möchte ich Herrn U. GRASSMANN auch an dieser Stelle vielmals danken.

den tatsächlichen Schneidstrahl und seines an der Blechkante gespiegelten Bildes — erzeugten Temperaturfeldes auf der Blechkante überall senkrecht

tativ mit der tatsächlichen Temperaturverteilung übereinstimmen, diese aber immerhin in ihren wesentlichen Zügen wiedergegeben.

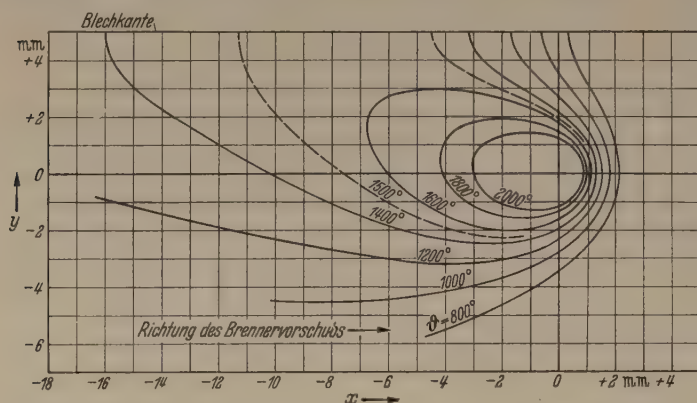


Abb. 4. Temperaturverteilung in der Blechebene für einen Schnitt im Abstand von 5 mm von der Blechkante, Vorschubgeschwindigkeit 10 m/h. Da in diesem Falle die 1500° Isotherme die Blechkante noch schneidet, würde also bei Vernachlässigung der Abstrahlung von der Blechkante der Steg zwischen Schnitt und Blechkante wegschmelzen.

stehen. Damit ist also die Randbedingung erfüllt, daß durch die Blechkante kein Wärmestrom nach außen fließt. Eine derartige Temperaturverteilung zeigt Abb. 4.

Wegen der notwendigen Vernachlässigungen werden die Ergebnisse der Rechnung nicht quanti-

Zusammenfassung.

Zur Berechnung der Temperaturverteilung beim autogenen Brennschneiden wird das Temperaturfeld einer linearen Wärmequelle berechnet, die geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit durch eine wärmeleitende Platte wandert. Durch „Spiegelung“ lassen sich auch die Temperaturfelder berechnen für den Fall, daß der Schneidstrahl in geringem Abstand von einer Blechkante parallel zu dieser geführt wird.

Literatur. [1] ZEYEN, L. u. W. LOHMANN: Schweißen der Eisenwerkstoffe, 2. Aufl., Düsseldorf 1948. — [2] HORN, H.: Autogenes Brennschneiden, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1951. — [3] GRASSMANN, P.: Z. angew. Physik 1, S. 452 (1949). — [4] MALZ, H.: Die Grenzen der Schneidgeschwindigkeit beim Brennschneiden, Würzburg 1933. — [5] MADELUNG, E.: Naturwiss., 30, 223 (1942). — [6] JAHNKE-EMDE: Funktionen Tafeln und Kurven, 4. Aufl., New York 1945.

Prof. Dr. PETER GRASSMANN,
Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik
der E. T. H. Zürich.

Thermodynamik und Supraleitung.

Von MAX V. LAUE, Berlin.

(Eingegangen am 25. April 1952.)

1938 leitete der Verfasser [1], [2] für die magnetische, longitudinale Grenzfeldstärke H^0 , welche ein supraleitender Draht vom Radius R gerade noch erträgt, ohne in den Zwischen-Zustand überzugehen, die Formel ab:

$$H^0 = H_k \frac{I_0(i\beta R)}{(-iI_1(i\beta R))}. \quad (1)$$

Dabei ist β^{-1} die Eindringtiefe des Feldes, H_k der Schwellenwert, in welchen H^0 im Fall des dicken Drahtes ($\beta R \gg 1$) übergeht, $I_0(i\beta R)$ und $I_1(i\beta R)$ sind die beiden ersten BESSEL-Funktionen mit imaginärem Argument: physikalische Grundlage ist die LONDONSche Theorie der Supraleitung in ihrer ursprünglichen Form mit skalarer Supraleitungskonstanten $\lambda = 1/\beta c^2$. Die zu (1) führende Überlegung

lautet: Die Kraft $\frac{1}{2} H^0 \left[\frac{-iI_1(i\beta R)}{I_0(i\beta R)} \right]^2$, welche die

LONDONSchen Spannungen auf die Flächeneinheit der Grenze des Supraleiters ausüben, muß im Gleichgewichtsfall gerade genügen, um bei jeder denkbaren Verrückung der Oberfläche die zur Vergrößerung der freien Energie notwendige Arbeit zu leisten. Die Differenz der freien Energie f_n für das Mol des Normal- und f_s für das Mol des Supraleiters steckt in dem Faktor H_k von (1); denn es gilt mit V als Molvolumen die Beziehung

$$\frac{1}{2} H_k^2 = (f_n - f_s) / V. \quad (2)$$

Für kleine Werte von $\beta \cdot R$ wird

$$\frac{I_0(i\beta R)}{(-iI_1(i\beta R))} = \frac{2}{\beta R} \quad (3)$$

und nach (1)

$$H^0 = \frac{2 H_k}{\beta \cdot R}. \quad (4)$$

Mit abnehmendem R wächst also H^0 über alle Grenzen. Dasselbe gilt für die supraleitende Scheibe der Dicke $2R$ und die Kugel vom Radius R . Wir diskutieren im folgenden den Fall des Drahtes (Kreiszyinders).

Nun findet sich häufig folgendes Mißverständnis: „Man braucht von allen denkbaren Verrückungen nur eine solche zu berücksichtigen, welche auf einer Änderung des Radius R eines supraleitenden Kerns im Draht um $-\delta R$ beruht.“ In der Tat ist dann nach (3) die Arbeit der Oberflächenkräfte pro Längeneinheit des Zylinders

$$2\pi R \delta R \cdot \frac{1}{2} H^0 \left(\frac{1}{2} \beta R \right)^2,$$

die Zunahme der freien Energie

$$2\pi R \delta R \frac{f_n - f_s}{V}.$$

Gleichsetzung beider Ausdrücke führt unmittelbar auf Gl. (4). Im Sinne dieser Überlegung schließt man dann weiter: „Der supraleitende Kern kann sich bei beliebigem Magnetfeld so verkleinern, daß er das Feld erträgt. Vollkommen stellt sich der normalleitende Zustand niemals her. Da dem die Erfahrung

iderspricht, ist die Überlegung, welche zu (1) führt, richtig oder mindestens unvollständig.“

Aber die Annahme, daß im Draht ein koaxialer supraleitender Kern übrigbleibt, wenn die Grenzfeldstärke überschritten wird, läßt sich thermodynamisch nicht rechtfertigen. Der zweite Hauptsatz ist nämlich ein Ausschlußprinzip und nicht mehr; alle Vorgänge, welche zu einer Abnahme der Gesamtentropie der beteiligten Körper führten, erklärt er für unmöglich. Auch alle aus ihm gezogenen Folgerungen sind Ausschlußaussagen. Ein thermodynamischer Gleichgewichtssatz z. B. sagt aus, daß unter gewissen Bedingungen keine Zustandsänderung eintritt, weil jede denkbare, mit diesen Bedingungen verträgliche Änderung mit Entropieabnahme verknüpft wäre. Eine Angabe hingegen, in welcher Weise das Gleichgewicht bei Verletzung jener Bedingungen zusammenbricht, wäre eine positive Aussage und geht über den Bereich der Thermodynamik hinaus.

Um dies an einem Beispiel zu erläutern, betrachten wir das Gleichgewicht zwischen einer Flüssigkeit und ihrem Dampf. Senkt man bei konstanter Temperatur den Druck durch Volumenvergrößerung unter den Siededruck, so sagt die Thermodynamik, daß sie nunmehr verdampfen kann, während Kondensation des Dampfes nach wie vor unmöglich ist. Aber ob die Verdampfung sofort einsetzt¹, oder erst nach einer Weile, ob sie an der Oberfläche stattfindet, oder ob sich im Inneren der Flüssigkeit Blasen bilden, diese Fragen gehen über die Thermodynamik hinaus. Nur wieviel Flüssigkeit verdampft, wenn sich bei vergrößertem Volumen das neue Gleichgewicht eingestellt hat, läßt sich wieder thermodynamisch behandeln. Gläser — um eine weitere Erläuterung zu geben — befinden sich nach H. O. JONES und F. E. SIMON [3] weit außerhalb eines Gleichgewichtes; die Thermodynamik ließe zu, daß sie auskristallisieren, während sie die Umwandlung der kristallisierten Substanz in den Glaszustand ausschließt. Und doch bleiben Gläser unter Umständen Jahrzehnte und Jahrhunderte unverändert.

Ebensowenig sagt die Thermodynamik allein etwas über die Vorgänge beim magnetischen Zusammenbruch der Supraleitung aus, die thermodynamische Theorie steht also nicht in Widerspruch zu der Tatsache, daß sich dabei zunächst der räumlich instetige Zwischenzustand, nach JUSTI [4] auch zeitlich unstetig, einstellt. Im Gegenteil: Daß diese Aufspaltung des Körpers in größere normal- und dünnere supraleitende Teile notwendig eintritt, hat der Verfasser² daraus gefolgert, daß sonst ein mathematischer Konflikt zwischen den Anforderungen der Thermodynamik und den Gesetzen der Magnetostatik unvermeidlich wäre. Aber erst das Hineinspielen der letzteren ermöglicht diese Aussage. Freilich wissen

¹ Unter Umständen geht sie so rasch vor sich, daß die Druckverminderung unmerklich bleibt.

² Siehe [2] § 19. Beim Zylinder im longitudinalen Feld der bei der planparallelen Platte versagt diese Argumentation scheinbar, jedoch nur, wenn man den Zylinder oder die Platte als unendlich lang betrachtet.

wir heute noch nicht, wieviel der Substanz normalleitend geworden ist, wenn sich bei gegebener äußerer Feldstärke das neue Gleichgewicht eingestellt hat. Aber eine zukünftige Theorie des Zwischenzustandes wird auch darüber Auskunft geben.

Aus demselben Grunde darf man auch die manchmal so auffällige Hysterese beim thermischen Phasenübergang nicht als Widerlegung der Supraleitungstheorie ansehen. Bei Unterkühlung unter die Sprungtemperatur wird der Normalleiter thermodynamisch instabil; sein Zustand ähnelt thermodynamisch dem eines Glases. Die einzelnen Kristallkörper springen dann mehr oder minder unabhängig voneinander mit verschiedenen Verzögerungszeiten in den supraleitenden Zustand um.

Die Opponenten gegen Gl. (1) wollen allerdings dem obigen Trugschluß auf andere Art entgegen. Sie führen für die Grenze zwischen Normal- und Supraleiter eine freie Oberflächenenergie σ ein. Damit träte zu der oben berechneten Zunahme der freien Energie bei Veränderung von R um $-\delta R$ ein Summand $-2\pi\sigma\delta R$ hinzu. Aus der dann resultierenden Gleichung folgt für den Grenzwert H^0 im Fall, daß $\beta R \ll 1$ ist,

$$H^0 = \frac{4 H_k^2}{(\beta R)^2} - \frac{4 \sigma}{\beta^2 R^3}.$$

H^0 würde also Null für

$$R = \frac{\sigma}{H_k^2}.$$

Ein supraleitender Kern von diesem Radius könnte, selbst ohne Magnetfeld, nicht mehr bestehen, a fortiori nicht bei einem noch so schwachen Magnetfeld. Damit wäre der Beobachtung eines vollständigen Übergangs zur Normalleitung genügt, und darin soll ein Beweis für die Existenz der Oberflächenenergie liegen. Nach dem Obigen aber ist die ganze Vorstellung von dem Zurückweichen einer zylindrischen Grenzfläche ohne Formänderung unzutreffend, so daß die Notwendigkeit der Einführung dieses σ ex machina fortfällt. Gegen die Oberflächenenergie spricht, das sei wieder einmal betont, die Gesamtgröße der Grenzflächen im Zwischenzustand. Gäbe es ein irgendwie beträchtliches σ , so träte die m. E. unbeantwortbare Frage auf, woraus der entsprechende große Betrag freier Energie gedeckt werden soll.

Zusammenfassung.

Es handelt sich um die Widerlegung eines geläufigen Einwandes gegen die übliche Anwendung der Thermodynamik auf das Gleichgewicht zwischen Normal- und Supraleiter.

Literatur. [1] LAUE, M. v.: Ann. d. Phys. **32**, 71 u. 253 (1938). — [2] LAUE, M. v.: Theorie der Supraleitung, 2. Aufl. Springer 1949, § 17 u. 18. — [3] JONES, N. O. und F. E. SIMON: Endeavour **8**, No 32 (1949); Phys. Blätter **7**, 9 (1951). — [4] JUSTI, E.: Phys. Z. **43**, 130 (1942); Ann. d. Phys. **42**, 84 (1942).

Prof. Dr. MAX V. LAUE

Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem, Faradayweg 4.

Graphisches Verfahren zur Bestimmung der theoretischen Bodenzahl bei Waschvorgängen mit starken Temperaturveränderungen.

Von HERMANN LINDE, München.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

Im folgenden bedeuten:

- A in der Säule aufsteigende Gaskomponente (Nm^3/h), die am Lösungsvorgang nicht teilnimmt;
- B auszuwaschende, bzw. zu entgasende Gaskomponente (Nm^3/h);
- C Hilfsentgasergas (Nm^3/h);
- F Waschmittelmenge (to/h);
- P_1 Gesamtdruck in der Waschsäule (ata);
- P_2 Gesamtdruck in der Entgasungssäule (ata);
- p Partialdruck der auszuwaschenden bzw. entgasenden Komponente in der Gasphase (ata);
- π Rückdruck der ausgewaschenen bzw. zu entgasenden Komponente aus der Lösung (ata);
- β' Löslichkeitskoeffizient der auszuwaschenden bzw. zu entgasenden Komponente ($\frac{\text{Nm}^3}{\text{to ata}}$);

ϑ Flüssigkeitstemperatur ($^{\circ}\text{K}$);

c_F spez. Wärme der Flüssigkeit ($\frac{\text{kcal}}{\text{to}^{\circ}}$);

c_P spez. Wärme des Gases ($\frac{\text{kcal}}{\text{Nm}^3^{\circ}}$);

r Lösungswärme der auszuwaschenden Komponente ($\frac{\text{kcal}}{\text{Nm}^3}$);

Zeiger 0 Unteres Ende der Säule;

Zeiger n n -ter Boden der Säule;

Zeiger N Oberes Ende der Säule (N -ter Boden).

In der Technik der Gaszerlegung finden u. a. Waschprozesse Verwendung, bei denen ein Gas-

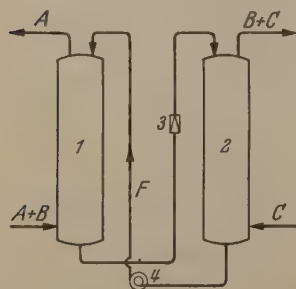


Abb. 1. Waschprozeß.

gemisch unter Druck und in der Kälte in einer Washkolonne einer Flüssigkeit entgegenströmt, die in der Lage ist, eine oder auch mehrere Komponenten des Gasgemisches herauszulösen. Hierbei können dann je nach Bedarf entweder die in der Flüssigkeit gelösten Kom-

ponenten nach Entgasung oder die gasförmig verbliebenen getrennt gewonnen werden.

Im folgenden sei ein Verfahren aufgezeigt, welches ermöglicht, solche Prozesse zu berechnen, auch dann, wenn infolge der bei der Trennung auftretenden Wärmetönungen (Lösungswärmen) starke Temperaturänderungen in den Waschsäulen auftreten.

Wir legen der Berechnung folgenden — vereinfachten — Prozeß zugrunde. Ein binäres Gemisch mit den Bestandteilen A und B , aus dem die eine, mengenmäßig überwiegende Komponente A rein gewonnen werden soll, wird unter dem Druck P_1 bei tiefer Temperatur in der Waschsäule 1 mit einem geeigneten Lösungsmittel gewaschen. In diesem ist die Komponente B löslich, A dagegen unlöslich. Diese verläßt die Säule daher am oberen Ende gasförmig, während jene in der Flüssigkeit die Säule unten verläßt. Die

Flüssigkeit wird bei 3 entspannt und in Säule 2 unter dem niedrigen Druck P_2 entgast, indem ihr ein lösliches Gas C entgegenströmt. Befreit von der Komponente B gelangt die Flüssigkeit in die Pumpe 4, von der sie wieder auf den Kopf der Säule 1 gefördert wird. In dieser wird sie von neuem mit der Komponente A beladen. Da der Prozeß bei tiefer Temperatur stattfindet, ist zur Deckung der Kälteverluste eine Kältemaschine notwendig; außerdem sind zum Wärmeaustausch von Roh-, Rein-, Entgaser- und Restgas noch Wärmeaustauscher erforderlich. Diese sind hier fortgelassen, da sie für die folgende Betrachtung ohne Einfluß sind.

Je nach Waschsäulendruck P_1 und je nach der Ausgangskonzentration der herauszuwaschenden Komponente B treten durch die Lösungswärme, bzw. Entgasungskälte, in den Säulen mehr oder weniger starke Temperaturänderungen auf, die bei der Berechnung berücksichtigt werden müssen.

Der Berechnung legen wir einige vereinfachende Annahmen zugrunde:

1. Das HENRYSche Gesetz für die Löslichkeit von Gasen in Lösungsmitteln gelte für den beschriebenen Vorgang in erster Näherung.

2. Der Löslichkeitskoeffizient sei im betrachteten Temperaturintervall als Funktion der Temperatur bekannt.

3. Die Wärmekapazität des Lösungsmittels sei größer als die des Gasgemisches. Unter dieser Voraussetzung kann angenommen werden, daß die Lösungswärme bzw. die Entgasungskälte von dem Lösungsmittel aus den Säulen abgeführt wird und daß die Gastemperatur an allen Stellen der Säulen annähernd der Flüssigkeitstemperatur gleich ist.

Von der Waschsäule wird verlangt, daß von der Gasmenge B_0 , die im Gemisch mit A in die Säule eintritt, nur die kleine Menge B_N die Säule verläßt. Dementsprechend müssen die Partialdrücke von A am unteren und am oberen Ende der Säule

$$p_0 = \frac{B_0}{A + B_0} P_1 \quad \text{bzw.} \quad p_N = \frac{B_N}{A + B_N} P_1$$

sein.

Von der Entgasungssäule wird verlangt, daß die ganze in Säule 1 von dem Lösungsmittel aufgenommene Menge $(B_0 - B_N)$ aus dem Lösungsmittel wieder entfernt wird. Das heißt, es muß dort der Partialdruck in der Gasphase von $p = 0$ auf

$$p = \frac{B_0 - B_N}{B_0 - B_N + C} P_2$$

ansteigen.

Beaufschlagen wir die Säule 1 mit der Flüssigkeit F , so könnte diese im Gleichgewicht am oberen Ende $F \cdot \beta'_N \pi_N$ (Nm^3/h), bzw. am unteren Ende $F \cdot \beta'_0 \pi_0$ (Nm^3/h) der Komponente B enthalten. Um aber einen Stoffstrom aus der Gasphase in die Flüssigkeit aufrechtzuerhalten, müssen wir eine gewisse Gleichgewichtsstörung zulassen, in der Weise, daß der Partialdruck p der Komponente B in der Gas-

Phase stets größer als der Rückdruck π dieser Komponente aus der Flüssigkeit ist. Wir setzen daher am oberen und am unteren Ende die Gleichgewichtslösungen $p_N - \pi_N$ bzw. $p_0 - \pi_0$ an.

Umgekehrt muß in der Entgasungssäule π stets größer als p sein, da dort der Stoffstrom aus der Flüssigkeit ins Gas gehen muß.

Um nun die Säulen mit der richtigen Zahl von Austauschböden versehen zu können, auf denen der verlangte Umsatz stattfinden kann, müssen wir die theoretische Bodenzahl des Wasch- bzw. des Entgasungsvorganges ermitteln.

Hierzu stellen wir uns die Wirkungsweise eines theoretischen Bodens mit vollkommener Durchmischung wie bei der Rektifikation so vor, daß sich auf ihm die Zusammensetzungen von Gas und Flüssigkeit derart ändern, daß die von ihm ablaufende Flüssigkeit mit dem von ihm aufsteigenden Dampf im Gleichgewicht steht. Dies ist der Fall, wenn der Rückdruck der auszuwaschenden Komponente B aus der Flüssigkeit gleich dem Partialdruck derselben Komponente in der Gasphase ist, also

$$\pi_{n-1} = p_n; \quad \pi_n = p_{n+1}$$

usw. (siehe Abb. 2).

Isotherme Wäsche.

Wir denken uns zunächst einen Waschvorgang, bei dem die Lösungswärme bzw. die Entgasungskälte so gering ist, daß sich die Temperatur des Lösungsmittels in den Säulen nur wenig ändert. Wir können dann den Löslichkeitskoeffizienten praktisch als konstant ansehen. Die theoretische Bodenzahlbestimmung ist in diesem Fall sehr einfach. Sie läßt sich nach derselben Methode durchführen, die bei der Rektifikation von 2-Stoffgemischen in dem Gebiet verwendet wird, in dem die Gleichgewichtskurve durch eine Gerade dargestellt werden kann [1]. Sie ergibt sich aus der Gleichung

$$Z_{th} = \frac{p_0 - p_N}{(p_0 - \pi_0) - (p_N - \pi_N)} \ln \frac{p_0 - \pi_0}{p_N - \pi_N}. \quad (1)$$

Wäsche mit starker Temperaturänderung.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn durch die Lösungswärme in der Waschsäule bzw. durch die Entgasungskälte in der Entgasungssäule die Temperatur in der Waschsäule von oben nach unten stark ansteigt und in der Entgasungssäule ebenso stark abfällt. Wegen der Temperaturabhängigkeit des Löslichkeitskoeffizienten muß hier bei der Bestimmung der theoretischen Bodenzahl anders vorgegangen werden.

In der Waschsäule soll durch die Flüssigkeitsmenge F wieder die Gasmenge $B_0 - B_N$ ausgewaschen werden. Es muß daher gelten

$$(B_0 - B_N) = F (\beta'_0 \pi_0 - \beta'_N \pi_N) \quad (\text{Stoffbilanz}). \quad (2)$$

Die Lösungswärme und die eingangs gemachte Annahme 3 liefert die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} (B_0 - B_N) r &= (F + B_0 - B_N) c_F (\vartheta_0 - \vartheta_N) \\ &- (A + B_N) c_p (\vartheta_0 - \vartheta_N) \quad (\text{Wärmebilanz}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hierbei ist $(B_0 - B_N)$ klein gegen F und B_N klein gegen A , so daß in erster Näherung gilt:

$$(B_0 - B_N) r = (F \cdot c_F - A c_p) (\vartheta_0 - \vartheta_N). \quad (4)$$

Durch Gl. (2) und (4) ist das Temperaturintervall der Wäsche festgelegt, wobei von einer bestimmten Temperatur am unteren Ende der Säule und damit auch von einem bestimmten β'_0 ausgegangen wird. π_0 und π_N sind durch bestimmte, angenommene Gleichgewichtslösungen ebenfalls gegeben, da p_0 und p_N vorgeschrieben sind. F und β'_N müssen durch Probieren gefunden werden.

Schreiben wir die Gl. (2) und (4) in der Form

$$B_0 - B_N = F (\beta'_0 \pi_0 - \beta'_N \pi_N) \quad (5)$$

und

$$(B_0 - B_N) \cdot r = (F c_F - A c_p) (\vartheta_0 - \vartheta_N), \quad (6)$$

so beschreiben sie den Stoff- bzw. Wärmeaustausch vom unteren Ende bis zum n -ten Boden. Eine weitere Beziehung liefert uns das DALTONSche Gesetz

$$p_n = \frac{B_n}{A + B_n} P_1. \quad (7)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\beta'_n \pi_n = \beta_0 \pi_0 - \frac{F c_F - A c_p}{F \cdot r} (\vartheta_0 - \vartheta_n) \quad (8)$$

und aus (6) und (7)

$$p_n = \frac{P_1}{1 + \frac{1}{B_0 - \frac{1}{r} (F c_F - A c_p) (\vartheta_0 - \vartheta_n)}}. \quad (9)$$

Durch Gl. (8) haben wir eine Beziehung zwischen $\beta' \pi$ und ϑ , durch Gl. (9) eine solche zwischen p und

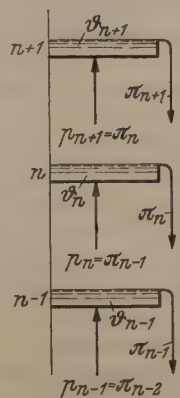


Abb. 3.
Teil der Waschsäule.

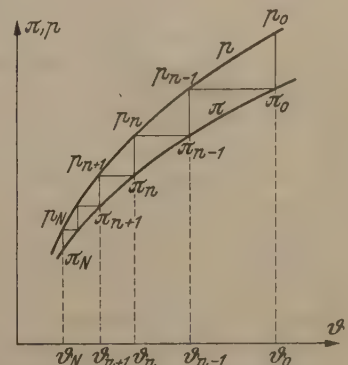


Abb. 4.
Druck-Temperatur-Diagramm.

ϑ gewonnen. Dividieren wir die Gerade (8) an verschiedenen Punkten durch den Löslichkeitskoeffizienten β' , den wir in seiner Temperaturabhängigkeit als bekannt voraussetzen (Bedingung 2), so können wir in ein Druck-Temperatur-Diagramm die entsprechende π -Kurve eintragen. In dasselbe Diagramm zeichnen wir die p -Kurve ein. Die Punkte π_0 , p_0 und π_N , p_N kennzeichnen das untere bzw. obere Ende der Waschsäule. Wir brauchen nun lediglich von p_0 ausgehend zwischen den beiden Kurven p und π bis P_N

abwechselnd senkrechte und waagrechte Strecken zu zeichnen und erhalten wie bei dem bekannten Stufenverfahren für die Bestimmung der theoretischen Bodenzahl bei der Rektifikation von Zweistoffgemischen [2], [3] aus der Anzahl der Stufen die theoretische Bodenzahl (siehe Abb. 4).

Denn es folgt ja einerseits aus der Wirksamkeit des theoretischen Bodens vollkommener Durchmischung (s. o.), daß $p_n = \pi_{n-1}$; $p_{n+1} = \pi_n$ usw. ist (siehe Abb. 3), andererseits aus der Wärmebilanz, daß bei einer Änderung des Rückdruckes der ausgewaschenen Komponente aus der Flüssigkeit von $\pi_{n-1} - \pi_n$ die Temperaturänderung $\vartheta_{n-1} - \vartheta_n$ eintreten muß.

In gleicher Weise können wir die Bodenzahlbestimmung für die *Entgasungssäule* durchführen, nur liegt in diesem Falle die $\pi(\vartheta)$ -Kurve über der $p(\vartheta)$ -Kurve, da bei der Entgasung der Rückdruck der zu entgasenden Komponente aus der Flüssigkeit größer sein muß als der Partialdruck p derselben Komponente in der Gasphase. Im übrigen geht man am besten in der Weise vor, daß man mehrere p -Kurven, die verschiedenen Entgasergasmengen C entsprechen, in das Diagramm einzeichnet. Man prüft ihre Lage zur π -Kurve, die in erster Näherung für

verschiedene C -Mengen gleich bleibt, durch Bestimmung der theoretischen Bodenzahl und wählt schließlich diejenige Entgasergasmenge, für die sich eine Bodenzahl ergibt, die eine technisch vertretbare Säulenhöhe zur Folge hat.

Zusammenfassung.

Die Bestimmung der theoretischen Bodenzahl von Waschvorgängen mit starker Temperaturänderung läßt sich graphisch nach dem bekannten Stufenverfahren für die Rektifikation von Zweistoffgemischen durchführen, wenn an Stelle der dort verwendeten Austauschkurve und der Gleichgewichtskurve zwei Druckkurven in einem Druck-Temperatur-Diagramm aufgetragen werden. Die eine der beiden Kurven stellt den Partialdruck der auszuwaschenden Gaskomponente in der Gasphase, die andere den Rückdruck derselben Komponente aus dem Lösungsmittel dar.

Literatur. [1] EUCKEN, A. u. M. JAKOB: Der Chemie-Ing. 1, 118 (1933). — [2] KIRSCHBAUM, E.: Destillier- u. Rektifiziertchnik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1950. — [3] HAUSEN, H.: Z. ges. Kälte-Ind. 44, 1 (1937).

Dr. rer. nat. HERMANN LINDE,
München-Solln, Pöffenbacherstr. 11

Die Verwendung der sogenannten Voltalumineszenz für spektralanalytische Zwecke.

VON DIETRICH LÖBELL, München.

(Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München.)

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. August 1952.)

1. Allgemeiner Überblick.

Beim Durchgang elektrischer Ströme durch Elektrolyte treten unter besonderen Bedingungen Leuchterscheinungen an den Elektroden auf. Dieses Leuchten ist seit seiner Entdeckung durch WEHNELT [1] verschiedentlich untersucht worden [2] und unter dem Namen „Voltalumineszenz“ in der Literatur bekannt. Die Erscheinungen treten sowohl an der Anode wie auch an der Kathode auf, doch ist das kathodische Leuchten weitaus intensiver. Die folgenden Ausführungen beziehen sich daher nur auf die kathodischen Leuchterscheinungen der Voltalumineszenz.

Zur Erzeugung des kathodischen Leuchtens gehen wir von folgender Anordnung aus: In einem Gefäß befindet sich ein saurer oder basischer Elektrolyt, z. B. HNO_3 oder KOH . Als Elektroden dienen zwei Pt-Drähte von etwa 0,5 mm Durchmesser. Legt man nun — unter Vorschaltung eines Widerstandes von etwa 50 Ohm — eine Gleichspannung von 110 Volt an die Elektroden, taucht sodann zuerst die Anode und daraufhin vorsichtig die Kathode in den Elektrolyt ein, so daß erst durch das Eintauchen der Kathode der Stromkreis geschlossen wird, so überzieht sich der eingetauchte Teil der Kathode mit einer leuchtenden Schicht. Für ihr Zustandekommen ist eine starke Erhitzung des Elektrolyten in unmittelbarer Nähe der Kathode wesentlich. Diese entsteht beim vorsichtigen Eintauchen der Kathode in folgender Weise: Bei der ersten, punktförmigen Berührung

zwischen der Kathode und der Elektrolytoberfläche tritt der Strom mit einer großen Stromdichte von der Elektrode in die Flüssigkeit über. Dabei erhitzt sich die Kathode und die sie umgebenden Flüssigkeitsschichten verdampfen. Sie legen sich in Form eines Dampfmantels um die Kathode. Dieser bildet den Sitz der Leuchterscheinung. Die Ursache des Leuchtens ist eine bogenähnliche Entladung, die sich in der Dampfschicht abspielt.

Daß die wesentliche Rolle beim Zustandekommen der Leuchterscheinung tatsächlich die Erhitzung der Kathode spielt, wird durch folgende Versuche bestätigt: Taucht man die Kathode schnell in den Elektrolyt ein, so tritt nur eine gewöhnliche Elektrolyse auf, da die punktförmige Berührung und die damit zusammenhängende große Stromdichte zu kurze Zeit andauern, um die Kathode zu erhitzen. Umgekehrt kann man bei Verwendung von dicken Drähten (Durchmesser > 2 mm) als Kathode oft keine Leuchterscheinung erzielen, da hier die für die Erwärmung der Kathode nötige Stromdichte nicht erreicht wird. Die Form und Fläche der Anode dagegen beeinflussen die Erscheinungen nicht.

Die Farbe der Leuchterscheinung hängt wesentlich von den als Kationen im Elektrolyt befindlichen Elementen ab. So zeigt sich z. B. bei Verwendung einer Lösung von NaCl in angesäuertem Wasser die charakteristische Farbe der Na-D-Linie, bei einer Lösung von TlNO_3 in HNO_3 beobachtet man das grüne Licht der Tl-Linie 5350, bei einer Lösung von

Li_2CO_3 in HNO_3 die rote Farbe der Li-Linie 6707. Spektroskopische Untersuchungen bestätigen diese Beobachtungen und ergeben weiterhin, daß die Wasserstofflinien H_α und H_β angeregt werden.

Auf Grund dieser Erscheinungen wird das kathodische Leuchten der Voltalumineszenz gelegentlich zum qualitativen Nachweis von in Lösungen befindlichen Elementen, besonders von Na, K, Li, Ca, Sr u. a. verwendet.

2. Fragestellung.

Die besonders gute Eignung zur Lösungsanalyse von Elementen, die, wie z. B. K im Funken nur schwer anzuregen sind, und die überaus einfache Anordnung regen zu der Frage an, ob sich die Spektrenanregung durch Voltalumineszenz nicht auch für die quantitative Analyse verwenden läßt. Um die Eignung hierfür festzustellen, wurden daher die Erscheinungen der Voltalumineszenz nochmals eingehend untersucht und Versuche zur quantitativen Analyse von Lösungen bekannter Zusammensetzung ausgeführt.

3. Versuchsanordnung.

Das zur Anregung des Leuchtens benutzte „Elektrolysiergefäß“ ist in Abb. 1 wiedergegeben. Zur Aufnahme des Elektrolyten dient ein kleines Reagenzglas. Um zu starke Erhitzung des Elektrolyten bei länger dauernden Versuchen zu verhindern, ist es mit einer Wasserkühlung versehen. Das Gefäß kann zur Reinigung leicht ausgewechselt werden¹. Die

Elektroden bestehen aus zwei einseitig in Glasröhren eingeschmolzenen Platindrähten (Durchmesser etwa 0,5 mm) von verschiedener Länge (s. Abb. 1). Sie sind über eine optische Bank unverrückbar mit dem Spektrographen verbunden, während das Elektrolysiergefäß gegen sie verschiebbar ist. Durch die feste Anordnung der Elektroden ist für völlige Reproduzierbarkeit in mechanischer und optischer Hinsicht gesorgt. Zum „Zünden“ der Leuchterscheinung legt man — wie in Abs. 1 geschildert — über einen Vorschaltwiderstand von 50 Ohm eine Gleichspannung von 110 Volt an die Elektroden, und zwar in der Weise, daß die längere Elektrode Anode ist. Schiebt man nun das Elektrolysiergefäß von unten an die feststehenden Elektroden heran, so taucht zuerst die Anode und erst danach die Kathode in den Elektrolyt ein, und es erfolgt die Zündung der Leuchterscheinung. Für die Versuche wurde das Gefäß in einer solchen Lage arretiert, daß die leuchtende Schicht die Kathode in einer Länge von 0,5—1 cm bedeckte. Die leuchtende Kathode wurde in der üblichen Weise in das Objektiv des Spektrographen abgebildet.

¹ Die Apparatur war aus Glas angefertigt, es konnten daher nur die im sichtbaren Gebiet liegenden Teile der Spektren beobachtet werden.

4. Die elektrischen Verhältnisse bei Voltalumineszenz.

Beim Zünden der Leuchterscheinung macht man die Beobachtung, daß während des Eintauchens der Kathode verschiedene Arten des Leuchtens auftreten. Systematische Untersuchungen der elektrischen Verhältnisse und ihres Einflusses auf die Leuchterscheinung führen zu folgendem Ergebnis: Der Widerstand der leuchtenden Dampfschicht ist beträchtlich größer als der des Elektrolyten, so daß praktisch der gesamte an den Elektroden gemessene Spannungsabfall — er sei im folgenden als Zellenspannung bezeichnet — in der Dampfschicht liegt. Mit zunehmender Eintauchtiefe der Kathode nimmt der Widerstand ab, er beträgt bei einer Eintauchtiefe von 1 cm ungefähr 100—200 Ohm. Bei den normalerweise verwendeten Zellenspannungen von 40—60 Volt fließen daher Ströme von 0,2—0,6 Ampere durch die Apparatur.

Da die Leuchterscheinung eine fallende Charakteristik hat, darf der Stromkreis nur über einen Ohmschen Widerstand geschlossen werden. Andernfalls gerät die Kathode in Glut und schmilzt. Der Vorschaltwiderstand dient zugleich zur Regelung der Zellenspannung.

Die zu Beginn dieses Abs. erwähnte Erscheinung beim Eintauchen der Kathode erklärt sich in folgender Weise: Beim Variieren der Zellenspannung beobachtet man allgemein, daß die Art des Leuchtens mit der Zellenspannung wechselt. Bei Spannungen von 90—110 Volt hat die Leuchterscheinung deutlich intermittierenden Charakter: Die Zellenspannung zeigt dabei in unregelmäßigem Rythmus Schwankungen von etwa 10 Volt. Die Dampfschicht ist in turbulenter, deutlich sichtbarer Bewegung, und Untersuchungen mit Hilfe eines Kathodenstrahl-oszillographen ergaben, daß der Stromdurchgang mit einer mittleren Frequenz von etwa 5000 Hz völlig unterbrochen wird. Dieses Verhalten steht in Analogie zu dem des WEHNELT-Unterbrechers, mit dem Unterschied, daß bei diesem der stromunterbrechende Mechanismus an der Anode erfolgt. Erniedrigt man die Zellenspannung durch Vergrößern des Vorschaltwiderstandes, so wird die Frequenz der Stromunterbrechungen kleiner, und bei Spannungen von 40—80 Volt „brennt“ die Leuchterscheinung sehr ruhig. Die Dampfschicht ist dabei fast in Ruhe, und die Schwankungen der Zellenspannung betragen nur etwa 1 Volt. Bei weiterem Sinken der Zellenspannung tritt bei Spannungen zwischen 25 und 40 Volt — die Werte schwanken wie auch die oben angegebenen je nach Art des verwendeten Elektrolyten und der gelösten Elemente — ein Erlöschen der Leuchterscheinung ein. Dabei bricht mit einem hörbaren Geräusch die Dampfschicht zusammen und es kommt eine gewöhnliche Elektrolyse zustande.

Die Anregung des Leuchtens mit hohen Spannungen (90—100 V) ist für spektralanalytische Versuche wegen der starken Inkonstanz und der Gefahr des Auftretens eines Kontinuums — herrührend von der in Glut geratenden Kathode — nicht zu empfehlen. Dagegen scheinen besonders reproduzierbare und stabile Verhältnisse in der Nähe der für das Erlöschen des Leuchtens charakteristischen Spannung vorzuliegen. Für die Anregung der Leuchterscheinung werden daher im allgemeinen Zellenspannungen von 40—60 Volt verwendet.

5. Überblick über die bei Voltalumineszenz emittierten Spektren.

Wie schon in Abs. 1 erwähnt wurde, zeigen die Spektren neben den Wasserstofflinien H_α und H_β die Linien der im Elektrolyt als Kationen befindlichen Elemente. Besonders intensiv erschienen dabei die Linien der Elemente Na (5890), Ca (4226), Tl (5350), Li (6707), mit schwächerer Intensität K (4044), Pb (4057), während ein Versuch, Ge zum Leuchten anzuregen, mißlang. Wir haben diese Ergebnisse dahingehend zu deuten, daß die spektrale Anregung durch Voltalumineszenz auf Grund der Anregungsbedingungen besonders günstig ist für Elemente geringerer Anregungsenergie, also insbesondere für die Alkalien und Erdalkalimetalle und unter ihnen wiederum für die leichteren. Dagegen scheinen sich Elemente hoher Anregungsenergie wie Ge nicht anregen zu lassen. Bei einem Vergleich mit den Resultaten, die LUNDEGÄRDH mit seinem Brenner erzielte [3], fällt sofort die gute Übereinstimmung beider Ergebnisse auf. LUNDEGÄRDH zählt nach seinen Erfahrungen unter „Elemente höchster Empfindlichkeit“ Li, Na, Ca, Tl, während K unter „Elementen mittlerer Empfindlichkeit“ und Pb unter „Elementen geringer Empfindlichkeit“ aufgeführt werden. Ge wurde offenbar auch im LUNDEGÄRDH-Brenner nicht mit Erfolg angeregt. Diese Übereinstimmung, die sich im folgenden auch in quantitativer Weise zeigen wird, läßt schon hier den Schluß zu, daß die bei Voltalumineszenz emittierten Spektren hinsichtlich ihres Charakters und ihrer Intensität den mit Hilfe des LUNDEGÄRDH-Brenners angeregten weitgehend gleichen.

6. Bestimmung der mit Voltalumineszenz nachweisbaren Grenzkonzentrationen.

Um quantitative Aussagen über die bei Voltalumineszenz erzielbare Empfindlichkeit zu erhalten, wurden Versuche zur Bestimmung der nachweisbaren Grenzkonzentration unternommen. Die Durchführung dieser Versuche sei an einem Beispiel erläutert:

Zur Bestimmung der nachweisbaren Grenzkonzentration von Ca dienten Lösungen von $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ in HNO_3 -Ln. Zunächst wurde eine Ausgangslösung mit einer Konzentration von $\frac{1}{10}$ Mol/l durch genaues Wägen hergestellt. Diese wurde mit HNO_3 -Ln in bekannten Verhältnissen weiter verdünnt, so daß eine Reihe von Lösungen bekannter, abgestufter Konzentration zur Verfügung stand. Diese wurden zum Leuchten angeregt und die Spektren photographiert. Um Fehler weitgehend auszuschließen, verwendet man für jede Lösung ein frisches Reagenzglas, zudem werden vor dem Eintauchen in den Elektrolyt die Elektroden in einer Bunsenflamme zu heller Glut erhitzt. Als nachweisbare Grenzkonzentration bezeichnen wir nun die Konzentration, bei der sich die für den Nachweis benutzte empfindliche Linie noch deutlich vom Untergrund abhebt ¹.

¹ Dem entspricht nach unseren Erfahrungen eine Schwärzungsdifferenz zwischen Untergrund und Linie von etwa 0,04. Dieser Wert kann nur als grober Näherungswert betrachtet werden. Doch ist das nicht von großer Bedeutung da die „nachweisbare Grenzkonzentration“ — jedenfalls unter normalen Bedingungen — keiner objektiven Messung zugänglich ist, da sie außer von der benutzten Linie auch vom Plattenmaterial und anderen Faktoren abhängt.

Die Ergebnisse verschiedener Versuche sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; die letzte Spalte enthält zum Vergleich die von LUNDEGÄRDH angegebenen Werte.

Tabelle 1. Mit Voltalumineszenz nachweisbare Grenzkonzentrationen und mit dem Lundegeärdh-Brenner erzielte Vergleichswerte.

Element — Analysenlinie	nachweisb. Grenzkonz.	Vergleichswerte
Tl 5350	$5 \cdot 10^{-6}$ Mol/l	$2 \cdot 10^{-6}$ Mol/L
Ca 4226	$1 \cdot 10^{-5}$ „	$1 \cdot 10^{-5}$ „
Li 6707	$\sim 5 \cdot 10^{-6}$ „	$1 \cdot 10^{-6}$ „
Pb 4057	$2 \cdot 10^{-4}$ „	$6 \cdot 10^{-4}$ „
Ge 4686	— „	— „

Auch unter Berücksichtigung der in der Fußnote angeführten Vorbehalte kann man aus der weitgehenden Übereinstimmung der in den beiden letzten Spalten angeführten Meßergebnisse schließen, daß die durch Voltalumineszenz angeregten Spektren den im LUNDEGÄRDH-Brenner angeregten gleichen.

7. Die Verwendung der Voltalumineszenz zur quantitativen Analyse.

Weitere Untersuchungen befaßten sich mit der Frage, ob die spektrale Anregung in der geschilderten Lichtquelle in so reproduzierbarer Weise erfolgt, daß damit quantitative Analysen durchgeführt werden können. Zu dieser Fragestellung führt einerseits der Wunsch, eine einfache Lichtquelle zur quantitativen Analyse von alkalihaltigen Lösungen (Bodenproben) zu gewinnen, für die bis heute nur der LUNDEGÄRDH-Brenner zur Verfügung steht. Andererseits läßt die Art der Anregung, die Verunreinigungen durch das Elektrodenmaterial ausschließt, erwarten, daß besonders saubere und daher genau reproduzierbare Anregungsbedingungen existieren. Trotzdem führten Versuche, aus der absoluten Intensität Rückschlüsse auf die Konzentration des Elementes im Elektrolyt zu ziehen, zu keinem Erfolg: Bei Anregung unter stets denselben Bedingungen traten Intensitätsschwankungen auf, die nach dem Photometrieren Schwankungen der photographischen Schwärzung von der Größe 0,3—0,5 bedingten. Daraufhin wurde entsprechend der Methode der Analyse durch Schwärzungsvergleich verfahren. Hierbei vergleicht man bekanntlich die Intensität einer Linie, die von einem Element in konstanter Konzentration (Grundelement) herrührt, mit der einer Linie des Analyseelementes, dessen Konzentration variabel ist. Das relative Intensitätsverhältnis hängt von der Konzentration des Analyseelementes ab, so daß man nach Aufstellung einer Eichkurve quantitative Messungen durchführen kann. Erfahrungen, die mit anderen Lichtquellen gemacht wurden, zeigen nun, daß das relative Intensitätsverhältnis wesentlich auch von den elektrischen Daten der Lichtquelle abhängt. Diese Erkenntnis führte zur Erfindung der sogenannten gesteuerten Lichtquellen, von denen hier als Beispiel nur der FEUSSNERSche Funken-erzeuger angeführt sei.

Die Frage war nun, von welchen Größen das relative Intensitätsverhältnis bei Anregung durch Voltalumineszenz abhängt, und ob es überhaupt möglich sei, mit einer einfachen ungesteuerten Apparatur reproduzierbare Ergebnisse zu erzielen.

Die Versuche ergaben, daß bei konstanter Konzentration des Analyseelementes das relative Intensitätsverhältnis einer Linie des Grund- und des Analyseelementes stark von der Zellenspannung abhängt. Bei einer aus Na und Tl zusammengesetzten Lösung ist das mit bloßem Auge zu erkennen: Die bei einer Zellenspannung von 75 Volt deutlich grüne Farbe der Dampfschicht geht bei Verringerung der Spannung zunehmend in eine gelbliche Färbung über.

Zur Gewinnung quantitativer Ergebnisse wurde das Spektrum der gemischten Lösung bei verschiedenen Zellenspannungen aufgenommen und photometriert. Als Maß für das relative Intensitätsverhältnis dient die Differenz der Schwärzungen beider Linien.

Die nachfolgende Tabelle 2 gibt die Ergebnisse eines Versuches, der mit Na als Grundelement und Tl als Analyseelement durchgeführt wurde, und die eines anderen, bei dem die Li-Linie 6707 als Analyselinie und die Linie H_{α} als Vergleichslinie benutzt wurde.

Tabelle 2. Abhängigkeit des relativen Intensitätsverhältnisses von der Zellenspannung bei Voltalumineszenz.

Analysen-Vergleichslinie	Zellenspannung [V]	Schwärzungsdifferenz
Tl 5350—Na—D	75	0,5
	50	0,8
Li 6707 — H_{α}	80	0,8
	60	—0,4

In beiden Fällen zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit des relativen Intensitätsverhältnisses von der Zellenspannung. Andererseits ergab sich, daß bei strenger Konstanzhaltung der Zellenspannung während einer Versuchsreihe das relative Intensitätsverhältnis ebenfalls in engen Grenzen konstant ist. Die dabei auftretenden kleinen Abweichungen sind vor allem durch die schon erwähnten geringen Schwankungen der Zellenspannung bedingt (s. Abs. 4 u. Abb. 2). Trotzdem wurde die Lichtquelle zunächst ohne automatischen Spannungskonstanthalter betrieben.

Die Untersuchung der Abhängigkeit der relativen Linienintensität von der Kationenkonzentration des Analyseelementes gestaltete sich folgendermaßen: Zur Anregung der Vergleichslinie diente eine Lösung konstanter Konzentration des Grundelementes, die in festem Verhältnis mit Lösungen abgestufter Konzentration des Analyseelementes gemischt wurde. Diese gemischten Lösungen wurden unter denselben Bedingungen, d. h. vor allem bei derselben Zellenspannung zum Leuchten angeregt und die erhaltenen Spektren photometriert. Trägt man nun in einem Koordinatensystem die Differenz der Schwärzungen von Vergleichs- und Analyselinie gegen den log der Konzentration des Analyseelementes auf, so muß sich nach den üblichen Erfahrungen eine Gerade ergeben.

Das Meßergebnis einer mit der schon erwähnten Kombination Na—Tl durchgeführten Versuchsreihe zeigt Abb. 2. Die Lösungen enthielten hier das Analyseelement Tl in Konzentrationen von $1/30$, $1/100$, $1/300$ und $1/1000$ Mol/l, während das Grundelement Na stets in einer Konzentration von 1 Mol/l gelöst war. Von jeder Lösung wurden 5 Aufnahmen

gemacht. Die zu einem Abszissenwert, d. h. also zu einer bestimmten Lösung gehörigen Ordinatenwerte geben die schon erwähnte Schwankung der relativen Linienintensitäten wieder. Aus der Streuung der Meßpunkte ergibt sich im vorliegenden Fall für die quantitative Konzentrationsbestimmung ein Einzelfehler von höchstens $\pm 20\%$, während der mittlere Fehler $\pm 7\%$ beträgt. In anderen Fällen wurden schon bei 3 Messungen mittlere Fehler von $\pm 7\%$ erzielt.

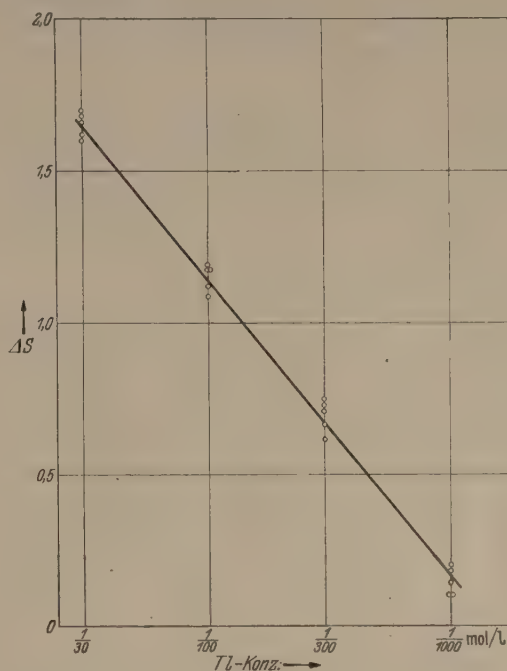


Abb. 2. Ergebnis einer Versuchsreihe zum quantitativen Nachweis von Tl.

Die Versuche wurden in verschiedenen Konzentrationsintervallen mit der Kombination Tl—Na, sowie im Konzentrationsintervall $1/10$ Mol/l bis $1/300$ Mol/l mit Ca durchgeführt. Als Analyselinie diente hierbei die empfindliche Linie Ca 4226, während als Vergleichslinie das blaue K-Duplett 4044/47 verwendet wurde. Auch in diesem Falle zeigten sich ganz entsprechende Ergebnisse.

Schließlich sei noch der Versuch einer quantitativen Analyse von Lithium erwähnt: Bei diesem Versuch wurde Li_2CO_3 in HNO_3 -Lsg. gelöst, ohne daß die Lösung eines Grundelementes zugefügt wurde. Als Analyselinie diente die Li-Linie 6707, als Vergleichslinie die vom Elektrolyt herrührende Linie H_{α} . Wenn der Elektrolyt während einer Versuchsreihe immer in derselben Konzentration verwendet wird, müssen sich auch bei diesem Verfahren brauchbare Ergebnisse erzielen lassen. Dies war auch tatsächlich der Fall, die Genauigkeit war sogar auffallend groß: Der Fehler der Einzelmessung betrug nur $\pm 8\%$. Diese vereinfachte Methode ist sicher immer anwendbar, wenn eine brauchbare Analyselinie in der Nähe der Wasserstofflinie H_{α} liegt.

Fassen wir das Ergebnis der Versuche zur Verwendung der Voltalumineszenz zur quantitativen Analyse zusammen, so zeigt sich Folgendes:

1. Quantitative Messungen nach der Methode der Analyse durch Schwärzungsvergleich — bei der der zu untersuchenden Lösung die Lösung eines Grund-

elementes zugefügt werden muß und das *relative* Intensitätsverhältnis zweier Linien zur Messung benutzt wird — sind mit einer ungesteuerten Apparatur mit Einzelfehlern von $\pm 20\%$ möglich, während sich im allgemeinen ein mittlerer Fehler von $\pm 7\%$ ergibt.

2. Liegt die Analysenlinie der Wasserstofflinie H_α benachbart, so ist es nicht nötig, der Lösung ein Vergleichselement zuzufügen, da auf Grund der konstanten Wasserstoffionenkonzentration die Linie H_α als Vergleichsline verwendet werden kann.

3. Es ist mit der einfachen, ungesteuerten Apparatur nicht möglich, nur auf Grund von *absoluten* Intensitätsmessungen quantitative Ergebnisse zu erzielen.

8. Vergleich zwischen LUNDEGÄRDH-Brenner und Voltalumineszenz.

Zum Abschluß sei auch bezüglich der quantitativen Ergebnisse ein Vergleich zwischen LUNDEGÄRDH-Brenner und der auf Voltalumineszenz beruhenden Lichtquelle gezogen:

Beim LUNDEGÄRDH-Brenner wird bekanntlich die zu untersuchende Lösung in einem Luftstrom zerstäubt und daraufhin unter konstanten Bedingungen in einer Azethylenflamme verbrannt. Die Anordnung erfordert demgemäß einen gewissen Aufwand, dafür stellt der LUNDEGÄRDH-Brenner die einzige Lichtquelle dar, die es gestattet, quantitative Analysen nach einer absoluten Methode, d. h. ohne Verwendung eines Vergleichselementes durchzuführen. Der Einzelfehler betrug bei den ersten quantitativen Versuchen $\pm 13\%$, als mittlerer Fehler ergab sich bei einer von LUNDEGÄRDH angegebenen Versuchsreihe $\pm 5\%$, während heutige Apparaturen eine Genauigkeit von 1—2% erreichen [3]. Eine solche Genauigkeit wird mit der vorgeschriebenen einfachen Apparatur noch nicht erreicht, auch lassen sich hier keine quantitativen Analysen nach einer absoluten Methode durchführen. Doch lassen der geringe erforderliche Aufwand und die saubere, d. h. von der Möglichkeit der Verunreinigung der Analysenproben weitgehend freie Art der Anregung es als wünschenswert er-

scheinen, auch die geschilderte Lichtquelle für quantitative Untersuchungen, vor allem für Lösungsanalysen (Bodenproben u. ä.) z. B. durch genaueste Spannungsregelung noch zu vervollkommen.

Zusammenfassung.

Die kathodischen Leuchterscheinungen der Voltalumineszenz werden hinsichtlich ihrer Eignung für verschiedene Zwecke der Spektralanalyse untersucht. Eine einfache Apparatur wird beschrieben, mit deren Hilfe qualitative Lösungsanalysen von Alkalien und Erdalkalien durchgeführt werden können. Die einfache ungesteuerte Apparatur eignet sich auch für die Durchführung quantitativer Analysen, sofern man Einzelfehler von $\pm 20\%$ und mittleren Fehler von $\pm 7\%$ in Kauf nimmt. Ein Vergleich zwischen LUNDEGÄRDH-Brenner und der mit Hilfe der Voltalumineszenz betriebenen Lichtquelle führt zu dem Ergebnis, daß die von beiden Lichtquellen emittierten Spektren weitgehend dieselbe Intensität und den gleichen Charakter haben, ein Ergebnis, das durch Messungen der nachweisbaren Grenzkonzentrationen bestätigt wird. Bezüglich der Verwendung für quantitative Analysen zeigt sich der LUNDEGÄRDH-Brenner in seiner gegenwärtigen Ausführung der durch Voltalumineszenz betriebenen Lichtquelle hinsichtlich der Genauigkeit und durch die Möglichkeit absolute Messungen durchzuführen, überlegen, doch spricht für eine Verwendung und Weiterentwicklung der neuen Lichtquelle ihr einfacher Aufbau und der geringe Aufwand.

Dem Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule München, Herrn Prof. Dr. G. Joos möchte ich auch an dieser Stelle für die Anregung und das rege Interesse am Fortgang dieser Arbeit danken.

Literatur. [1] WEHNELT, A.: Wied. Ann. **68**, 233 (1899). — [2] LIFSCHITZ, J.: Proc. Amsterdam **26**, 561 (1923). — [3] LUNDEGÄRDH, H.: Die quantitative Spektralanalyse der Elemente. Jena 1929 und 1934.

DIETRICH LÖBEL, München, Herzogstr. 1a.

Eine neue theoretische und experimentelle Überprüfung des MEISSNERSchen Entropieprinzips in der Hydrodynamik an Hand der COUETTE-Strömung*.

Von EDUARD MAURER, München.

(Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München.)

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 14. Juli 1952.)

I. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit soll eine neue theoretische und experimentelle Anwendung und damit eine neue Prüfung der Theorie des Übergangs von laminarer zu turbulenter Strömung in der Hydrodynamik gegeben werden, die auf dem von W. MEISSNER und G. U. SCHUBERT [1] stammenden hydrodynamischen Entropieprinzip für die kritische REYNOLDSsche Zahl fußt, und die den vom Verfasser [2] in diese Theorie eingeführten Begriff des quasiadiabatischen Zustands

zur Vereinfachung der Rechnungen von MEISSNER und SCHUBERT benutzt.

MEISSNER und SCHUBERT und anschließend der Verfasser haben dieses Entropieprinzip auf die Strömung durch ein glattes, schwach konisches bzw. zylindrisches Kreisrohr angewandt, da hier die zahlenmäßigen Durchrechnung der Theorie notwendigen experimentellen Unterlagen genügend gesichert vorlagen. An dieser Stelle soll nun die sogenannte COUETTE-Strömung [3] mit der erwähnten vereinfachten Form des Entropieprinzips behandelt werden, also die Strömung zwischen zwei planparallelen

* Gekürzte Dissertation der T. H. München.

Wänden von festem Abstand, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit gegeneinander verschieben, oder allgemeiner die Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern, die sich mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit um die gemeinsame Achse drehen.

Nach W. MEISSNER ist der Umschlag von der laminaren in die turbulente Strömung kein rein hydrodynamisches, sondern auch ein thermodynamisches Problem. Das hydrodynamische Entropieprinzip lautet: Laminare und turbulente Strömungsform sind rein mechanisch genommen zunächst gleichberechtigt. Stabil ist jedoch diejenige der beiden Strömungsformen, deren Entropie die größere ist. Gleichheit der Entropie beider Strömungen ergibt die kritische REYNOLDSSche Zahl.

Unter der Entropie verstehen MEISSNER und SCHUBERT die von Temperatur und Druck allein abhängige Zustandsgröße der phänomenologischen Thermodynamik, also auch das BOLTZMANNsche Maß für die *rein molekulare* Unordnung. Genau genommen gehört zu diesem Entropiebegriff ein Zusatzglied, welches die in der Turbulenz so augenfällige Unordnung der *Molekülhaufen* erfaßt. Dieses Zusatzglied konnte vom Verfasser ebensowenig berücksichtigt werden wie von MEISSNER und SCHUBERT a. a. O. MEISSNER und SCHUBERT erwähnen, daß hierzu wohl die BOLTZMANNsche Fundamentalgleichung erweitert werden müßte.

Bei der Untersuchung der Rohrströmung erwies sich das MEISSNERSche Entropieprinzip grundsätzlich als zutreffend. Als kritische REYNOLDSSche Zahl ergab sich hierfür nach MEISSNER und SCHUBERT, die ihre Rechnungen an Hand eines idealen Gases durchführten, der Wert 1900, nach dem Verfasser, der eine *vollkommen* inkompressible Flüssigkeit annahm, der Wert 1400. Der unmittelbar experimentell gemessene Wert beträgt nach L. SCHILLER [4] etwa 2320. Die zahlenmäßige Abweichung bei MEISSNER und SCHUBERT mag vielleicht von der erwähnten Unvollständigkeit in der Entropiedefinition herrühren. Der größere Fehler beim Verfasser kann eventuell auch dadurch verursacht sein, daß bei der Entropiebestimmung die Kompressibilität (Druckabhängigkeit der Entropie) eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt.

Von den mannigfachen vergeblichen älteren Versuchen [5] zur Erklärung des Auftretens der Turbulenz und zur Berechnung einer kritischen REYNOLDSSchen Zahl hat erst die TOLLIEN-SCHLICHTINGSche *Anlauftheorie*¹ zu einem gewissen Erfolg geführt. Sie hat jedoch gegenüber der Entropietheorie den Nachteil, daß sie einen instationären Strömungszustand behandelt, also über das eigentliche stationäre² Turbulenzproblem nichts aussagen kann. SCHLICHTING erhält z. B. für einen einfachen flüssigkeitsgefüllten rotierenden Zylinder ohne Innenzylinder eine kritische REYNOLDSSche Zahl, oberhalb deren Turbulenz herrscht. Im stationären Zustand kann jedoch die Flüssigkeit nur turbulenzfrei wie ein fester Körper rotieren.

¹ Zusammenfassende Darstellung und Lit.-Angaben b. H. SCHLICHTING [5].

² „stationär“ ist hier grob makroskopisch zu verstehen, also ohne die turbulenten Schwankungen.

II. Theorie.

Die spezielle COUETTE-Strömung zwischen planparallelen Wänden ist einer experimentellen Überprüfung kaum zugänglich. Wir behandeln daher an dieser Stelle die allgemeine COUETTE-Strömung zwischen konzentrischen Kreiszyllindern, die sich besser experimentell verifizieren läßt. Die Flüssigkeitsteilchen beschreiben hier bei laminarer Strömung im einfachsten Fall konzentrische Kreisbahnen um die gemeinsame Achse. Wir werden ferner den Innenzylinder stets als feststehend annehmen und den Außenzylinder rotieren lassen, da, wie G. J. TAYLOR [6] theoretisch und experimentell gezeigt hat, bei rotierendem Innenzylinder noch vor dem Einsatz der Turbulenz eine ganz besondere Form der Laminarströmung auftritt, wobei die Flüssigkeitsteilchen keine Kreisbahnen mehr beschreiben, ein Fall, der die Rechnungen außerordentlich erschweren oder praktisch undurchführbar machen würde.

Weiterhin behandeln wir nur den stationären Zustand. Nach MEISSNER und SCHUBERT kommt es hier auf die Entropie der beiden Strömungsformen — laminar oder turbulent — an. Dementsprechend ist an dieser Stelle der Begriff „stationär“ weiter zu fassen als sonst in der Hydrodynamik. Er ist nicht nur hydrodynamisch, sondern auch thermodynamisch zu verstehen. Nicht nur die Strömungsgeschwindigkeit, sondern auch die Temperaturverteilung muß konstant geworden sein.

Bei unvollkommener Wärmeisolation der COUETTE-Zylinder läßt sich dieser Zustand in genügend langer Zeit immer erreichen. Die Quelldichte der inneren Reibungswärme ist dann (unter Vernachlässigung der störenden Einflüsse durch die Zylinderenden) für einen konstanten Achsenabstand konstant und die Wärme strömt nur noch radial ab. Die vollkommen adiabatische Zylinderisolation muß hierbei ausgeschlossen werden, da sonst die Temperatur des strömenden Mediums ständig ansteigen würde.

Es wird sich später zeigen, daß sich der Fall mit isothermer oder ungenügend isolierter Wand des äußeren Zylinders nicht in der vom Verfasser gewählten vereinfachten Form behandeln läßt, wohl aber der mit einer ausreichend großen (aber nicht vollkommen adiabatischen) Wärmeisolation. Diese Isolation bezeichnen wir mit *quasiadiabatisch* und geben im Verlauf der Rechnungen eine genauere Definition des Begriffs in dem hier verwendeten Sinn.

Die Flüssigkeit selbst wird als vollkommen inkompressibel angenommen. Wir behandeln damit nur einen Grenzfall der realen Flüssigkeiten und setzen voraus, daß unsere Rechnungen auch für diesen Grenzfall gültig sind, rechnen also von vornherein deshalb mit größeren Diskrepanzen.

Die REYNOLDSSche Zahl der COUETTESchen Anordnung mit konzentrischen Zylindern definieren wir durch

$$Re = \frac{W(R_a - R_i)\varrho}{\eta} = \frac{\Omega R_a(R_a - R_i)\varrho}{\eta}, \quad (1)$$

wo R_a und R_i die Radien von Außen- und Innenzylinder sind, W die Umfangsgeschwindigkeit und Ω die Winkelgeschwindigkeit des Außenzylinders, ϱ die Dichte und η die dynamische Zähigkeit des strömenden Mediums. Diese Definition läßt sich im Bedarfs-

fall zwangslos auch auf die COUETTE-Strömung zwischen planparallelen Wänden anwenden.

Wir gehen nun zu den Rechnungen zur Überprüfung des Entropieprinzips über. Die auf die Masseneinheit bezogene Entropie s einer völlig inkompressiblen Flüssigkeit ist unabhängig vom Druck und nur noch abhängig von der Temperatur T :

$$ds = \frac{c}{T} dT, \quad (2)$$

wo c die spezifische Wärme (bei konstantem Druck) bedeutet. c wird in den folgenden Rechnungen ebenso wie alle anderen Materialbeiwerte der Flüssigkeit als konstant angenommen.

Wird die Entropie der Flüssigkeit im Ausgangszustand bei ruhendem Außenzylinder gleich Null gesetzt (auf den absoluten Wert der Entropie kommt es hier nicht an), so wird sie bei rotierender Flüssigkeit nach Gl. (2) zu

$$s = c \ln \frac{T}{T_0}, \quad (3)$$

wo T_0 die Ausgangstemperatur ist, die gleich der Umgebungstemperatur sein soll.

Wir denken uns nun einen COUETTE-Apparat mit gegebenen Abmessungen und gegebener Füllflüssigkeit und berechnen bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit des bewegten Außenzylinders die Entropie der Füllung einmal bei laminarer und einmal bei turbulenter Strömung, wobei wir beide Strömungsformen nach dem Entropieprinzip zunächst als mechanisch gleichberechtigt ansehen. Diese Strömungen unterscheiden sich, wie schon COUETTE bemerkte, nach außen am charakteristischsten durch das Drehmoment, das zur Aufrechterhaltung der Winkelgeschwindigkeit des äußeren Zylinders an diesem angreifen muß und das auf den inneren (ruhenden) Zylinder übertragen wird. Wir werden also versuchen, die Entropie bzw. nach Gl. (3) die Temperaturerhöhung der beiden Strömungsarten als Funktion dieses Drehmoments auszudrücken.

Wir behandeln zunächst die laminare Strömungsform.

Wird bei der zweidimensionalen COUETTE-Strömung in Cartesischen Koordinaten als z -Richtung die Richtung der Zylinderachsen gewählt, so ergibt sich die auf die Zeit- und Volumeneinheit reduzierte Reibungswärme Q der inkompressiblen Flüssigkeit mit den Geschwindigkeitskomponenten w_x und w_y (Abb. 1) zu

$$Q = 2\eta \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω der in konzentrischen Kreisbahnen mit dem Radius r rotierenden Flüssigkeitsteilchen wird, wie schon lange bekannt ist, zu

$$\omega = \Omega \frac{R_a^2}{R_a^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_i^2}{r^2} \right), \quad (5)$$

wo Ω die Winkelgeschwindigkeit des angetriebenen Außenzylinders bei feststehendem Innenzylinder bedeutet. Ferner ist das auf die Einheit der Zylinderlänge übertragene Drehmoment M_l der Laminarströmung

$$M_l = 4\pi\eta\Omega \frac{R_a^2 R_i^2}{R_a^2 - R_i^2}. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) erhält man, wenn ω nach M_l statt nach Ω ausgedrückt wird,

$$\omega = \frac{M_l}{4\pi\eta R_i^2} \left(1 - \frac{R_i^2}{r^2} \right). \quad (7)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit selbst ergibt sich damit zu

$$|w| = w_\varphi = \frac{M_l}{4\pi\eta R_i^2} \left(r - \frac{R_i^2}{r} \right) \quad (8)$$

und ihre Komponenten w_x und w_y zu

$$w_x = -w_\varphi \frac{y}{r}, \quad w_y = w_\varphi \frac{x}{r}. \quad (9)$$

Mit diesen Werten erhält man für die Reibungswärme nach Gl. (4)

$$Q = \frac{M_l^2}{4\pi^2\eta} \frac{1}{r^4}. \quad (10)$$

Im stationären Zustand fließt diese Wärme nur radial nach außen ab. Ist hier q die Stromstärke des Wärmeflusses (strömende Wärmemenge je Flächen- und Zeiteinheit) und λ die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit, so gilt

$$Q = \text{div } q = -\lambda \text{div grad } T = -\lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right), \quad (11)$$

also mit Gl. (10)

$$\frac{M_l^2}{4\pi^2\eta} \frac{1}{r^4} = -\lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right). \quad (12)$$

Wird die Temperatur der Oberfläche des Außenzylinders mit T_a bezeichnet, so führt die Integration von Gl. (12) mit den Grenzbedingungen $r = R_a$

$T = T_a$, $r = R_i \frac{dT}{dr} = 0$ zu

$$T - T_a = \frac{M_l^2}{8\pi^2\eta\lambda} \left[\frac{1}{R_i^2} \ln \frac{R_a}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_a^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Die gesamte Wärmemenge Q' , die an der Oberfläche des Außenzylinders (pro Längeneinheit) aus dem COUETTE-Apparat abströmt, ist gleich der am Außenzylinder aufgewandten Arbeit

$$Q' = M_l \Omega. \quad (14)$$

Denkt man sich den Außenzylinder mit einer wärmeisolierenden Schicht umgeben, die von dieser Wärme Q' durchströmt wird, so läßt sich bei einer Umgebungstemperatur T_0 schreiben

$$Q' = 4\pi k (T_a - T_0), \quad (15)$$

wo k die mit einem geeigneten Faktor multiplizierte Wärmedurchgangszahl der Isolation ist. Ist das Isoliervermögen der Schicht Null (isothermer Außenzylinder), so ist k unendlich groß. Isoliert dagegen die Schicht immer idealer, so strebt k dem Wert Null entgegen.

Eliminiert man Q' und T_a aus den Gl. (13), (14) und (15) und setzt für die Laminarströmung den Wert Ω nach Gl. (6) ein, so erhält man die Temperatur T

der Flüssigkeit im Radius r

$$T - T_0 = \frac{M_i^2}{16 \pi^2 \eta} \left[\frac{2}{\lambda R_i^2} \ln \frac{R_a}{r} - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_a^2} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right) \right]. \quad (16)$$

Bei voll adiabatischer Isolation ist $k = 0$. Dieser Fall gibt eine endliche stationäre Temperaturverteilung.

Zu unserer Definition der *quasiadiabatischen Isolation* soll nun gehören, daß k nicht gerade verschwindend klein, aber doch sehr viel kleiner als die Wärmeleitzahl λ der Flüssigkeit ist, so daß auf der rechten Seite der Gl. (16) die Glieder mit $\frac{1}{\lambda}$ gegen das Glied mit $\frac{1}{k}$ vernachlässigt werden können.

Die Temperaturverteilung wird dann

$$T - T_0 = \frac{M_i^2}{16 \pi^2 k \eta} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right). \quad (17)$$

Wie man erwarten konnte, ist diese Temperatur bei ausreichend guter Wärmeisolation unabhängig vom Radius r .

Die spezifische Entropie s_i der laminar strömenden Flüssigkeit erhält man aus den Gl. (3) und (17) zu

$$s_i = c \ln \left[\frac{M_i^2}{16 \pi^2 k \eta T_0} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right) + 1 \right]. \quad (18)$$

Wir betrachten nun den turbulenten Strömungszustand, der sich im gleichen COUETTE-Apparat mit gleicher Füllung bei gleicher Winkelgeschwindigkeit Ω des Außenzylinders einstellen würde, wenn man von der Stabilitätsfrage absähe. Man wird erwarten, daß für die angenommene quasiadiabatische Wärmeisolation, bei der sich die Temperatur der laminar strömenden Flüssigkeit als unabhängig von r ergab, die Temperatur der turbulenten Flüssigkeit wegen der besseren Durchmischung erst recht unabhängig von r ist. Wir wollen auch hier in dieser Weise rechnen, die in der Technik bei der Behandlung turbulenter Rohrströmungen allgemein üblich ist.

Auch in diesem Fall strömt die innere Reibungswärme nur radial nach außen ab, und ihr Gesamtbetrag Q' (pro Längeneinheit), der durch die Oberfläche des Außenzylinders fließt, ist wie in Gl. (14) gegeben durch

$$Q' = M_t \Omega, \quad (19)$$

wo M_t das auf die Einheit der Zylinderlänge übertragene Drehmoment der turbulenten Strömung ist.

Setzen wir die Temperatur T der Flüssigkeit von vornherein konstant an, so müssen wir zunächst mit einem Temperatursprung $T - T_a$ zwischen der Flüssigkeit und der Oberfläche des Außenzylinders rechnen, der sich in einer dünnen Flüssigkeitsschicht an dieser Fläche abspielt. Wir begegnen diesem Temperatursprung in der üblichen Weise durch Einführung der Wärmeübergangszahl α und schreiben

$$Q' = 2\pi R_a \alpha (T - T_a). \quad (20)$$

Der Wärmedurchgang durch die Isolierschicht wird durch dieselbe Zahl k wie oben charakterisiert, so daß die Gl. (15) unverändert gilt.

Aus den Gl. (15), (19) und (20) ergibt sich

$$T - T_0 = \frac{M_t \Omega}{4\pi} \left(\frac{2}{R_a \alpha} + \frac{1}{k} \right). \quad (21)$$

Als quasiadiabatisch bezeichnen wir nun endgültig eine Isolation, bei der nicht nur wie oben k sehr viel kleiner als λ , sondern auch sehr viel kleiner als $R_a \alpha$ ist, so daß sich hierfür schreiben läßt

$$T - T_0 = \frac{M_t \Omega}{4\pi k}. \quad (22)$$

Mit Gl. (3) wird die Entropie der turbulent strömenden Flüssigkeit zu

$$s_t = c \ln \left(\frac{M_t \Omega}{4\pi k T_0} + 1 \right). \quad (23)$$

Es wurde schon früher bemerkt, daß sich der Fall mit isothermem oder ungenügend isoliertem Außenzylinder nicht in der hier durchgeführten Form behandeln läßt. Hier ist k so groß (im isothermen Fall ist das Isoliervermögen der Schutzschicht Null oder k unendlich groß), daß in Gl. (21) das Glied mit α nicht mehr vernachlässigt werden kann. Wärmeübergangszahlen, die durch Versuche mit künstlicher Beheizung der Versuchsflüssigkeit gewonnen werden, sind hier nicht verwendbar, da dieser Fall dem oben behandelten thermodynamisch nicht ähnlich ist. Bei derartigen Versuchen sind die durch die innere Reibung verursachten Wärmequellen vernachlässigbar gegen die künstliche Heizung. In unserem Fall dagegen sind sie die alleinige Ursache der Temperaturerhöhung in der Flüssigkeit.

Nach dem MEISSNERSchen Entropieprinzip ist nun diejenige Strömungsform die stabile, deren Entropie die größere ist. Vergleicht man die Ausdrücke (18) und (23), so ergibt sich

$$s_t \geq s_i, \text{ wenn } \frac{M_i^2}{16 \pi^2 k \eta T_0} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right) \geq \frac{M_t \Omega}{4\pi k T_0}. \quad (24)$$

Die Winkelgeschwindigkeit Ω des Außenzylinders ist nach Voraussetzung für die laminare und die turbulente Strömung gleich groß. Setzt man den Wert Ω für die laminare Strömung nach Gl. (6) ein, so geht Gl. (24) über in die einfache Beziehung

$$s_t \geq s_i, \text{ wenn } M_t \geq M_i. \quad (25)$$

Wir wollen nun in dem Kriterium (25) die Drehmomente M_i und M_t durch die dimensionslose REYNOLDSSche Zahl ersetzen. Hierzu führen wir analog wie bei der Rohrströmung neben der REYNOLDSSchen Zahl eine zweite dimensionslose Kenngröße, die *Widerstandsziffer* ζ ein, für die die theoretische Hydrodynamik nur die Vorschrift gibt, daß sie von der Form sein muß

$$\zeta = \frac{M}{\rho \Omega^2} \cdot f(R_a, R_i), \quad (26)$$

wo die Funktion f von R_a und R_i die Dimension der reziproken 4. Potenz einer Länge haben muß, sonst aber willkürlich ist. ζ ist für jede Strömungsart eine Funktion von Re allein. Diese Funktion ist für jeden Komplex von geometrisch ähnlichen COUETTE-Apparaten, also für jedes Radienverhältnis $R_a : R_i$ i. a. verschieden. Wir wählen

$$f(R_a, R_i) = \frac{64}{4\pi} \frac{R_a + R_i}{R_a^2 R_i^2}, \quad (27)$$

also mit (26)

$$\zeta = \frac{64}{4\pi \rho \Omega^2} \frac{M}{R_a^2 R_i^2}. \quad (28)$$

Für die laminare Strömung wird dann mit $M = M_l$ nach Gl. (6) bei allen Radienverhältnissen $R_a : R_i$

$$\zeta_l = \frac{64}{Re} \quad (29)$$

Das ist dieselbe Beziehung, wie sie für die Rohrströmung bekannt ist.

Für die turbulente Strömung läßt sich, wie die unten beschriebenen Versuche zeigen werden, innerhalb nicht allzuweit gesteckter Grenzen für die REYNOLDSSche Zahl analog wie bei der Rohrströmung schreiben

$$\zeta_t = \frac{a}{Re^n}, \quad (30)$$

wo a und n Konstanten sind, die sich i. a. für jeden Komplex von geometrisch ähnlichen COUETTE-Apparaten, also für jedes Radienverhältnis $R_a : R_i$ verschieden ergeben werden.

Setzt man in Gl. (30) die Widerstandsziffer der turbulenten Strömung nach Gl. (28) ein (mit $M = M_t$, $\zeta = \zeta_t$), so erhält man

$$M_t = \frac{4\pi}{64} \varrho \Omega^2 \frac{R_a^3 R_i^3}{R_a + R_i} \frac{a}{Re^n}. \quad (31)$$

Mit Gl. (6) und (31) wird unter Berücksichtigung der Definition (1) für die REYNOLDSSche Zahl die Gl. (25) zu

$$s_t \geq s_l, \quad \text{wenn} \quad Re \geq \left(\frac{64}{a}\right)^{\frac{1}{1-n}}. \quad (32)$$

Nach dem MEISSNERSchen Entropiekriterium ist damit die laminare Strömung stabil, wenn

$$Re < \left(\frac{64}{a}\right)^{\frac{1}{1-n}},$$

die turbulente Strömung stabil, wenn

$$Re > \left(\frac{64}{a}\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

Die kritische REYNOLDSSche Zahl, die den Übergang beider Strömungsformen charakterisiert, wird somit

$$Re_k = \left(\frac{64}{a}\right)^{\frac{1}{1-n}}. \quad (33)$$

Aus der Widerstandsziffer ζ_t als Funktion der REYNOLDSSchen Zahl (Gl. (30)), d. h. aus den Werten a und n ergibt sich mit Hilfe der MEISSNER-SCHUBERTSchen Entropie-Theorie ein Wert für die kritische REYNOLDSSche Zahl, bei der der Umschlag laminar-turbulent erfolgen soll, die nun andererseits durch die direkte Beobachtung des plötzlichen Anstiegs des Widerstandsgangs und des Unruhigwerdens der Strömung beim Übergang zur Turbulenz ermittelt werden kann. Ein Vergleich zwischen beiden Werten ist als Probe auf die Richtigkeit der ganzen Betrachtung anzusehen.

In der folgenden Tabelle 1 sind die unmittelbar experimentell an destilliertem Wasser zwischen Zimmertemperatur und etwa 60° C gefundenen Werte für a , n und Re_k nach den weiter unten folgenden Versuchen wiedergegeben, sowie die aus der Entropie-Theorie nach Gl. (33) errechneten Werte von Re_k . Die entsprechenden Werte COUETTES sind ebenfalls aufgenommen, da sie von den älteren vorliegenden Messungen im turbulenten Gebiet noch am zuverlässigsten erscheinen.

Tabelle 1.

$R_a : R_i$	a	n	Re_k theoret. nach Gl. (33)	Re_k direkt exp.
1,083	1,447	0,454 ₅	1040	3 163
1,443	2,046	0,576	3370	24 940
COUETTE: 1,017	0,469 ₇	0,242 ₈	659	1 936

Es darf noch darauf hingewiesen werden, daß die Bedeutung dieser Ergebnisse nicht so sehr in der Berechnung der Turbulenzgrenze selbst besteht, worauf auch MEISSNER und SCHUBERT [1] hingewiesen haben. Auf die Ursachen, die an den noch bestehenden zahlenmäßigen Diskrepanzen für die kritische REYNOLDSSche Zahl möglicherweise schuld sind, wurde schon oben hingewiesen. Wichtiger ist vielmehr, daß sich das hydrodynamische Entropieprinzip von MEISSNER grundsätzlich auch hier als zutreffend erweist und somit eine Erklärung für die Stabilitätsverhältnisse der laminaren und turbulenten Strömung geben kann: Wie für die Rohrströmung, so existiert auch für die COUETTE-Strömung eine kritische REYNOLDSSche Zahl, welche die beiden zunächst als gleichberechtigt angenommenen Strömungsarten in zwei Gebiete teilt. Für kleinere REYNOLDSSche Zahlen ist die Entropie der laminaren Strömung größer, wodurch nach der Entropietheorie hier diese Bewegung stabil wird, für größere REYNOLDSSche Zahlen überwiegt die Entropie der turbulenten Strömung, die dann also ihrerseits die stabile sein muß.

III. Versuche.

1. Apparatur.

Aus Abschnitt II geht hervor, daß zur Prüfung des MEISSNERSchen Entropieprinzips die funktionelle Abhängigkeit der Widerstandsziffer von der REYNOLDSSchen Zahl im turbulenten Gebiet benötigt wird. Hierzu ist es nötig, wie aus den Gleichungen (1) und (28) hervorgeht, zusammengehörige Werte der Umdrehungsgeschwindigkeit Ω des Außenzylinders (bei festem Innenzylinder) und des auf den Innenzylinder übertragenen Drehmoments M (pro Längeneinheit) durchzuführen.

Die Apparatur, die hierzu benutzt wurde, ist im wesentlichen derjenigen von COUETTE [3] nachgebaut und im Prinzip in Abb. 2 dargestellt.

In einem durch einen Gleichstrom-Regelmotor mit konstanter Tourenzahl angetriebenen Außenzylinder A , der mit destilliertem Wasser als Versuchsflüssigkeit gefüllt wird, hängt konzentrisch an einem Torsionsdraht (getemperter Stahldraht) zur Messung des übertragenen Drehmoments (objektive Spiegelablesung) der Innenzylinder J . Zur Vermeidung der störenden Einflüsse durch die endliche Länge des Innenzylinders sind nach dem Vorgang COUETTES die am Apparategestell befestigten Schutzzylinder S_o und S_u angebracht. Z_o und Z_u sind zwei Zwischenzylinder, die entweder am Innenzylinder J oder an den angrenzenden Schutzzylindern S_o und S_u befestigt werden können, so daß zu Kontrollzwecken bei der Messung des auf die Längeneinheit bezogenen Drehmoments verschiedene Innenzylinderhöhen zur Verfügung stehen. Die mit Wasser in Berührung stehenden Apparateile waren aus Messing hergestellt; Einzelteile aus anderen Metallen wurden durch

nen geeigneten sorgfältig auf Indifferenz geprüften
ack geschützt. Zur Vermeidung seitlicher Aus-
weichungen des am Torsionsdraht hängenden Innen-
zylinders insbesondere bei den Versuchen im turbu-
lenten Gebiet dienten die beiden sehr genau ge-
arbeiteten Irisblenden B_1 und B_2 , die im Bedarfsfall
geschlossen werden konnten.

Da Vorversuche ergeben hatten, daß der untere
Schutzzylinder seine Funktion, den störenden Ein-
fluß des mitrotierenden Außenzylinderbodens auszu-
schalten, nicht ausreichend genug erfüllte, wurden
hier nach einem Vorschlag von E. R. DREW [7] Ent-
störungsringe E_i und E_a angebracht, deren innerer
 E_i am unteren Schutzzylinder und deren äußerer E_a
am rotierenden Außenzylinder befestigt ist.

Die Versuche sollten zur Variation der Zähigkeit
nicht nur bei Zimmertemperatur, sondern auch bei
höheren Temperaturen durchgeführt werden. Des-
halb wurde der Außenzylinder A von dem Wärme-
schutzzylinder W umgeben. Der Zwischenraum
zwischen W und A konnte zur Wärmeisolation mit
Glaswolle gefüllt werden.

Besonderer Wert wurde auf sorgfältige Vertikal-
stellung und Zentrierung aller Zylinder gelegt. Hin-
reichende Einrichtungen hierzu waren vorgesehen.

Die Versuche wurden mit einem Außenzylinder
und drei Innenzylindereinsätzen von verschiedenen
Durchmessern durchgeführt. Die Abmessungen sind
in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

Außenzylinder: Durchmesser $2 R_a = 13,00$ cm
lichte Höhe 20,5 cm

Nr.	Radien- verhältnis $R_a : R_i$	Durchmesser $2 R_i$ cm	Höhe cm	
			ohne Zwischen- zylinder	mit angebrachten Zwischen- zylindern
1	1,083	12,00	2,95	6,98
2	1,443	9,00	2,96	6,97
3	2,362	5,48	3,01	—

Schutzzylinder:

	Höhe cm	
	ohne Zwischen- zylinder	mit angebrachtem Zwischenzylinder
S_o	8,0	10,0
S_u	5,0	7,0

2. Versuchsdurchführung und Ergebnisse.

Alle Versuche wurden mit destilliertem Wasser
durchgeführt.

Die Meßreihen zur Bestimmung zusammenge-
fügter Werte von Rotationsgeschwindigkeit des
Außenzylinders und übertragenem Drehmoment er-
folgten stets bei aufsteigender und bei absteigender
Drehungszahl, einmal um sicher zu sein, daß bei
jeder Änderung und Neueinstellung dieser Drehge-
schwindigkeit der stationäre Strömungszustand
erreicht war, dann aber auch, um Verschieden-
heiten beim Einsetzen der Turbulenz mit aufsteigen-
der Drehzahl (wachsender REYNOLDSScher Zahl) und
beim Abreißen der Turbulenz mit absteigender Dreh-

zahl (abnehmender REYNOLDSScher Zahl) erkennen
zu können.

Zur Kontrolle des REYNOLDSSchen Ähnlichkeits-
gesetzes wurden Versuchsreihen mit verschiedenen
Wassertemperaturen, also verschiedener Zähigkeit
der Versuchsflüssigkeit gemacht. Die gewählten
Temperaturen waren ungefähr 20° , 30° , 45° und
 60° C. Die Zähigkeiten des Wassers verhalten sich
hierbei ungefähr wie $1 : 0,8 : 0,6 : 0,47$.

Eine gewisse Schwierigkeit ist, wie schon er-
wähnt, die Ausschaltung der störenden Einflüsse
durch die Zylinderenden, die sich darin äußert, daß
z. B. bei der laminaren Strömung die Flüssigkeits-
teilchen nicht mehr konzentrische Kreisbahnen um
die gemeinsame Achse beschreiben. Es gibt zwei

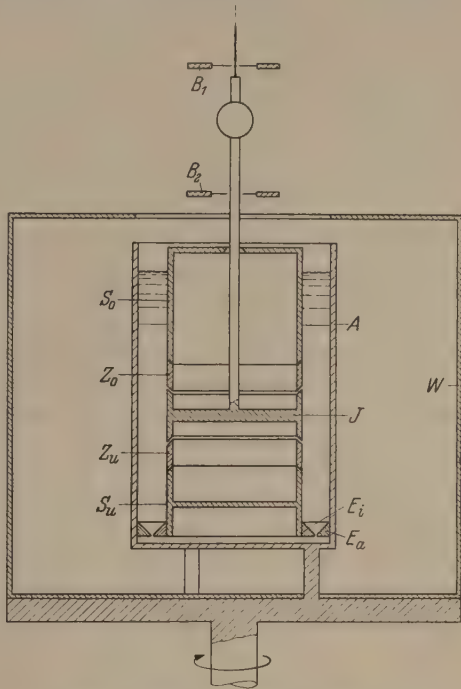


Abb. 2. Schema der Versuchsanordnung.

Kontrollen darauf, ob durch die unter Abschnitt III/1
beschriebenen Schutzmaßnahmen diese Störungen
praktisch unwirksam gemacht sind. Einmal müssen
die bei den beiden verschiedenen Innenzylinder-
längen gemachten Messungen des auf die Längenein-
heit reduzierten Drehmoments bzw. der Widerstands-
ziffer denselben Wert ergeben. Ferner müssen die
aus den Drehmomentmessungen im laminaren Ge-
biet nach Gl. (6) errechneten Zähigkeiten des Wassers
richtige Werte ergeben. Als richtig wurden dabei die
aus der kritischen Bearbeitung von BINGHAM und
JACKSON [8] resultierenden Ergebnisse aus Kapillar-
rohrmessungen unterstellt, nach der die Zähigkeit
des Wassers bei Zimmertemperatur als auf etwa
 $\pm 0,5\%$ (Maximalfehler) bekannt angenommen wer-
den kann (bei höheren Temperaturen sind die Ab-
weichungen entsprechend größer). Bei unseren Ver-
suchen wurden die Schutzmaßnahmen als ausreichend
angesehen, nachdem die größten Abweichungen von
den Werten BINGHAMS und JACKSONS etwa 2% be-
trugen (in der Regel waren sie jedoch kleiner). Unsere
Zähigkeitswerte liegen dabei systematisch zu hoch.
Diese Genauigkeit entspricht derjenigen der besten
Absolutmessungen der Wasserzähigkeit mit Zylinder-

apparaten von DREW [7] und von GUERNEY [9], die ebenfalls um etwa 2% zu hohe Werte erhielten.

Zur Vereinfachung wurden nur die Versuche bei Zimmertemperatur mit den beiden zur Verfügung stehenden Innenzylinderhöhen zur Prüfung des Zylinderenden-Einflusses durchgeführt. Die Versuche bei 30°, 45° und 60° C wurden mit denjenigen zur Kontrolle der Unabhängigkeit der Resultate von der Innenzylinderhöhe verknüpft und zwar derart,

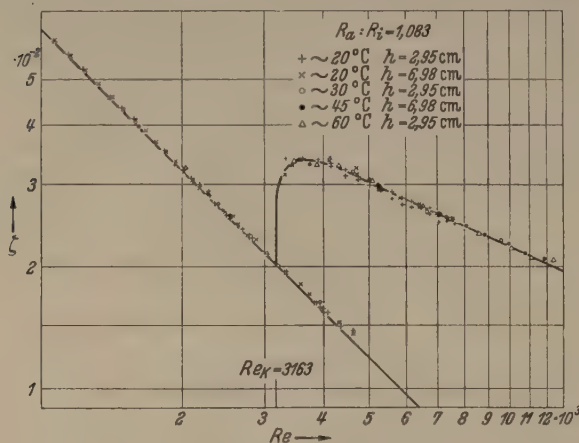


Abb. 3. Widerstandsziffer als Funktion der REYNOLDSschen Zahl für das Radienverhältnis $R_a/R_i = 1,083$.

daß die Versuche bei 30° und 60° C jeweils mit der kleineren der beiden zur Verfügung stehenden Höhen gemacht wurden, die Versuche bei 45° C dagegen mit der größeren.

Bei den Turbulenzversuchen ist der Lichtzeiger der Spiegelablesung am Innenzylinder sehr unruhig (im Gegensatz zu den Laminarversuchen). Der Innenzylinder erhält hier ständig tangentielle An-

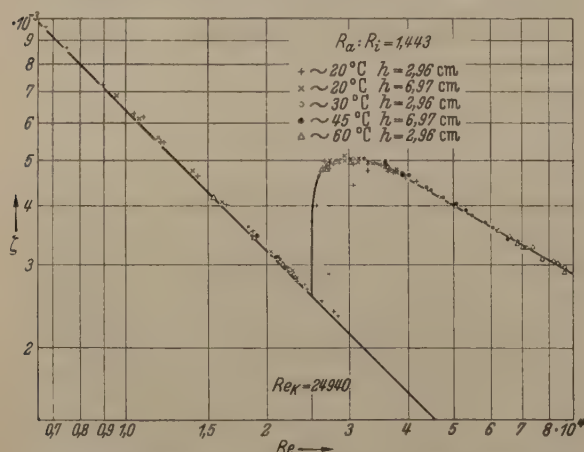


Abb. 4. Widerstandsziffer als Funktion der REYNOLDSschen Zahl für das Radienverhältnis $R_a/R_i = 1,443$.

triebsstöße und pendelt in der Zeit zwischen diesen Stößen mit Torsionsschwingungen aus. Versuche, diese Stöße durch eine Wirbelstrombremse abzufangen, ergaben kein befriedigendes Resultat. Es wurde daher zu der Methode COUETTES zurückgegriffen, aus drei Extremausschlägen in der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen in bekannter Weise die Mittellage zu bestimmen. Dies wurde gegebenenfalls für einen Meßpunkt drei- bis fünfmal wiederholt. Die so gewonnenen Werte sind am besten reproduzierbar und liegen bei der graphischen Auftragung am genauesten auf einer glatten Kurve.

Die graphische Darstellung der Versuchsergebnisse erfolgte in der bei Rohrversuchen bewährten Weise, daß als Abszisse die REYNOLDSsche Zahl (Gl. (1)) und als Ordinate die Widerstandsziffer (Gl. (28)) in doppeltlogarithmischem Maßstab aufgetragen wurde.

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen derart die Ergebnisse für die Radienverhältnisse $R_a/R_i = 1,083$ bzw. 1,443. Die unter 45° geneigte Gerade stellt den laminaren Strömungsverlauf nach Gl. (29) dar, als unter der Voraussetzung, daß die Schutzvorrichtungen zur Ausschaltung der Störungen durch die endliche Länge der Zylinder ihre Aufgabe ideal erfüllen würden. Tatsächlich liegen die Meßpunkte etwas höher, was auf noch vorhandene Reststörungen deutet. Dem entspricht der schon erwähnte Umstand, daß die aus diesen Messungen errechnete Zähigkeit des Wassers maximal um etwa 2% zu hoch lag.

Bei einer bestimmten kritischen REYNOLDSschen Zahl Re_k beginnt der turbulente Strömungsgast mit einem sprunghaften Anstieg des Drehmoments und damit der Widerstandsziffer. Bei vorsichtiger, langsamer Erhöhung der Drehzahl des Außenzylinders und damit auch der REYNOLDSschen Zahl ist es möglich die laminare Strömung auch für $Re > Re_k$ aufrecht zu erhalten. Diese Strömungsart ist jedoch hier labil und schlägt bei der geringsten Störung in die turbulente um. Der Umschlag erfolgte bei ganz unterschiedlichen REYNOLDSschen Zahlen, die für das Radienverhältnis $R_a/R_i = 1,083$ zwischen 3560 und 4705 lagen, für das Radienverhältnis 1,443, bei dem es wesentlich schwieriger war die laminare Strömung labil aufrecht zu erhalten, bei REYNOLDSschen Zahlen zwischen 25 530 und 29 330. Bei absteigender Drehzahl des Außenzylinders riß die turbulente Strömung mit einem sprunghaften Abfall des Drehmoments bzw. der Widerstandsziffer, jedoch immer bei derselben REYNOLDSschen Zahl, eben der kritischen ab. Dieser Wert ergab sich für $R_a/R_i = 1,083$ aus 20 Messungen bei verschiedenen Temperaturen zu $Re_k = 3163^{+20}_{-25}$ (die Fehlergrenzen sind Maximalabweichungen) und für $R_a/R_i = 1,443$ aus 20 Messungen zu $Re_k = 24 940^{+160}_{-220}$.

Der turbulente Ast läßt sich jeweils durch eine Gerade ersetzen und zwar gilt für

$$R_a/R_i = 1,083 \quad \zeta = \frac{1,447}{Re^{0,454}}$$

$$R_a/R_i = 1,443 \quad \zeta = \frac{2,046}{Re^{0,576}}$$

(vgl. Gl. (30) und Tabelle 1).

Diese Gleichungen für die turbulenten Äste sind es, die, wie schon erwähnt, zur zahlenmäßigen Durchführung der MEISSNERSchen Entropie-Theorie oben in diese eingebaut wurden.

Der Einsatz der Turbulenz wird auch durch eine plötzliche Unruhe des Lichtzeigers der Spiegelablesung angezeigt. Diese Unruhe wird mit steigender REYNOLDSscher Zahl wieder etwas kleiner. Der völlig ruhige Stand wie bei der Laminarströmung wird jedoch nicht mehr erreicht.

Die Erscheinungen beim Einsetzen und Abreißen der Turbulenz sowie der Verlauf des turbulenten Astes der Widerstandsziffer sind also ganz analog wie bei der Rohrströmung.

Beim Radienverhältnis $R_a/R_i = 2,362$ konnten die Störungen durch die endliche Zylinderlänge nicht mehr ganz ausgeschaltet werden, da die Höhe des Außenzylinders im Verhältnis zur Breite des Spaltes zwischen den Zylindern zu klein war. Auch konnte die Form des turbulenten Astes bei höheren REYNOLDSSchen Zahlen nicht mehr genau festgestellt werden, da die Stabilität der Apparatur nicht die benötigten hohen Umdrehungszahlen erlaubte. Aus einer entsprechenden graphischen Darstellung der Versuchsergebnisse konnte jedoch eine kritische REYNOLDSSche Zahl von etwa $85\,000 \pm 5000$ entnommen werden.

Bei allen Radienverhältnissen wurde das REYNOLDSSche Ähnlichkeitsgesetz streng erfüllt.

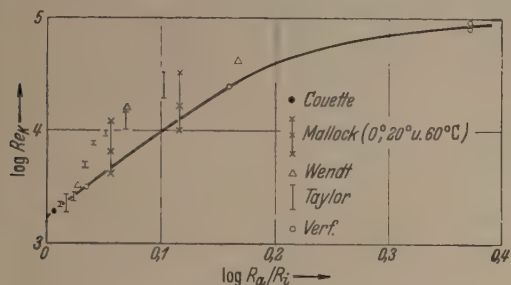


Abb. 5. Kritische REYNOLDSSche Zahl als Funktion des Radienverhältnisses.

V. Vergleich der vorliegenden Versuchsergebnisse mit älteren Arbeiten.

Ältere Messungen des Drehmoments im turbulenten Gebiet bei rotierendem Außenzylinder und feststehendem Innenzylinder liegen außer von COUETTE [3] vor von MALLOCK [10], WENDT [11] und TAYLOR [12]. Zur Ausschaltung des störenden Einflusses der rotierenden benutzte COUETTE zwei Schutzzylinder und MALLOCK eine besondere Einrichtung mit einer Quecksilberfüllung. WENDT und TAYLOR arbeiteten ohne Schutzzylinder. COUETTE und WENDT benutzten Wasser von Zimmertemperatur als Versuchsflüssigkeit, MALLOCK Wasser zwischen 0° und 60°C und TAYLOR mehrere Flüssigkeiten von verschiedener Zähigkeit bei Zimmertemperatur. MALLOCK fand das REYNOLDSSche Ähnlichkeitsgesetz nicht bestätigt. Seine kritischen REYNOLDSSchen Zahlen steigen stark mit der Temperatur an.

Die aus den Messungen im laminaren Gebiet abgeleiteten absoluten Zähigkeitswerte liegen je nach dem Verfasser um 10 bis über 100% zu hoch. Am zuverlässigsten erscheinen uns die Versuche COUETTES, dessen Zähigkeiten um 10 bis 20% zu groß sind; das sind vergleichsweise kleine Fehler. Seine Meß-

punkte im turbulenten Gebiet liegen bei der graphischen Auftragung wie oben verhältnismäßig streuungsfrei und ähnlich wie bei uns sehr gut auf einer glatten Geraden. Die Ergebnisse COUETTES sind daher bei der zahlenmäßigen Auswertung der Entropie-Theorie oben in Tabelle I mit aufgenommen worden.

Zu einem übersichtlichen Vergleich sind die direkt experimentell festgestellten kritischen REYNOLDSSchen Zahlen der verschiedenen Verfasser in Abhängigkeit vom Radienverhältnis in Abb. 5 aufgetragen. Bei kleiner werdendem Radienverhältnis konvergieren alle diese Werte, so daß man für $R_a/R_i = 1$, also für die spezielle COUETTE-Strömung zwischen planparallelen Platten auf die kritische REYNOLDSSche Zahl 1660 extrapolieren kann.

Zusammenfassung.

Die hydrodynamische Entropie-Theorie von MEISSNER und SCHUBERT wird in einer etwas modifizierten Form auf die COUETTE-Strömung zwischen konzentrischen Zylindern angewandt. Zur zahlenmäßigen Durchrechnung und Prüfung der Theorie werden Messungen des zwischen den Zylindern übertragenen Drehmoments bei turbulenter Strömung benötigt, die bei feststehendem Innen- und rotierendem Außenzylinder für zwei verschiedene Radienverhältnisse vorgenommen werden. Im Verein mit diesen Messungen werden aus der Theorie kritische REYNOLDSSche Zahlen errechnet und mit den unmittelbar experimentell gefundenen Werten verglichen. Von noch bestehenden zahlenmäßigen Abweichungen abgesehen, erweist sich das MEISSNERSche Entropieprinzip auch hier im wesentlichen als zutreffend.

Für die Unterstützung dieser Arbeit bin ich Herrn Prof. Dr. G. JOOS, Herrn Prof. Dr. G. HETTNER sowie dem verstorbenen Herrn Prof. Dr. E. v. ANGERER zu besonderem Dank verpflichtet.

Literatur. [1] MEISSNER, W. und G. U. SCHUBERT: *Ann. d. Phys.* (6) **3**, 163 (1948). — [2] MAURER, E.: *Z. f. Physik* **126**, 522 (1949). — [3] COUETTE, M. M.: *Ann. de chim et de phys.* (6) **21**, 433 (1890). — [4] SCHILLER, L.: *Im Handbuch d. Exp.-Physik* Bd. IV/4 S. 127 u. 129. — [5] Vgl. z. B. SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über theoret. Physik* Bd. II, S. 266 ff., Leipzig 1945, und SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*, S. 279 ff., Karlsruhe 1951. — [6] TAYLOR, G. J.: *Phil. Trans.* (A) **223**, 289 (1923). — [7] DREW, E. R.: *Phy. Rev.* **12** 114 (1901). — [8] BINGHAM, E. C. und R. F. JACKSON: *Scient. Pap. Bur. Stand.* Nr. 298 (1917). — [9] GUERNEY, L. E.: *Phys. Rev.* **26**, 98 (1908); **26**, 121 (1908); **26**, 123 (1908). — [10] MALLOCK, A.: *Phil. Trans.* (A) **187**, 41 (1896). — [11] WENDT, F.: *Ing.-Arch.* **4**, 577 (1933). — [12] TAYLOR, G. J.: *Proc. Roy. Soc., London* (A) **157**, 546 (1936).

Dr.-Ing. EDUARD MAURER, München 15, Grimmstraße 2.

Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen und der Blitzentladung um die Erde.

Von WINFRIED OTTO SCHUMANN, München.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 8. August 1952.)

In einer Arbeit [1] habe ich die Eigenfrequenzen des Systems Erde-Ionosphäre und speziell deren geringste Werte diskutiert und in einer anderen Arbeit [2] die Dämpfungen solcher Eigenschwingungen berechnet.

Es schien wünschenswert, für diese niedrigen Frequenzen bzw. sehr langen Wellen auch die Ausbreitungszeiten erzwungener Schwingungen (Dipol) um die Erde festzustellen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um den Frequenzbereich von 10–10000 Per/sek. bzw. Wellenlängenbereich von 30000 bis 30 km.

Die Ausbreitung elektrischer Wellen um die kugelförmige Erde mit Berücksichtigung der sie umgebenden Ionosphäre ist zuerst von G. N. WATSON [3] behandelt worden. Die Ionosphäre ist dabei als eine homogene Schicht mit konstantem Leitwert eingeführt worden, was besonders für „lange“ Wellen zutreffend ist. Die resultierende HERTZsche Potentialfunktion ergibt sich als eine Reihe, wobei die Zahl der wichtigen Glieder sehr groß ist ($\sim 2H/\lambda$), wo H die Höhe der Luftschicht bis zum Beginn der Ionosphäre und λ die Wellenlänge bedeutet). WATSON bestimmt die auftretenden Dämpfungen bei der Ausbreitung und findet sie in der Größenordnung der empirisch gewonnenen AUSTINSchen [4] Formel.

Für die Ausbreitung „sehr langer“ elektrischer Wellen vereinfacht sich die Formel von WATSON sehr stark, da die Zahl der Glieder bis auf eines zurückgeht. An sich gilt dies zunächst nur für $\lambda > H$, aber es wird sich zeigen, daß die Näherung, die man erhält, etwa bis $\lambda \approx \frac{H}{2}$ noch brauchbar ist.

Der Radius der Erde sei a , der Innenradius der Ionosphäre b , und $b-a=H$ die Höhe der Luftschicht. Der Sender befinde sich auf der Erdoberfläche an der Stelle $\Theta=0$. Die Erde sei unendlich gut leitend, für die Ionosphäre sei der Leitwert κ . In einem sphärischen Koordinatensystem r, φ, Θ seien die Feldstärken gegeben durch

$$E_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta} \right), \quad E_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi)}{\partial r \partial \Theta},$$

$$H_\varphi = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta}.$$

$$E_\varphi = 0, \quad H_r = 0, \quad H_\Theta = 0. \quad \beta_{Luft} = j\omega \epsilon_0, \quad \beta_{Ionosph} = \kappa.$$

Dann gilt für Π die Wellengleichung

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0. \quad k_{Luft}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_{Ionosph}^2 = -j\omega \mu \kappa.$$

Die HERTZsche Funktion des strahlenden Dipols ohne Störung durch Erde und Ionosphäre ist

$$\Pi_0 = \frac{1}{R} \cdot e^{-jkr},$$

wo R der Abstand vom Dipol ist. Ist die gesamte Strahlungsleistung des Dipols nach allen Richtungen gleich N , so ist Π_0 zu multiplizieren mit dem Faktor

$$A_0 = \frac{1}{k^2} \left[N \frac{3}{4\pi} \right] \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}^{1/2},$$

und mit $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi$ Ohm und N in kW gemessen ist

$$A_0 = \sqrt{N_{kW}} \cdot \frac{300}{k^2}, \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Ist der Sender durch seine Halbraumstrahlung N bestimmt, so ist A_0 noch mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren und für effektive Feldstärken sind die Werte von E und H noch durch $\sqrt{2}$ zu dividieren. Dann ist nach der WATSONschen Transformation das resultierende HERTZsche Potential auf der Erdoberfläche

$$\Pi(a, \Theta) = -\frac{\pi(2\nu+1)}{k a^2} \frac{P_\nu(-\cos \Theta)}{\sin \nu \pi} \cdot \frac{g}{h} \quad (1)$$

und mit $k a = x, \quad k b = y$

$$g = \psi_\nu(x) \xi'_\nu(y) - \psi'_\nu(y) \xi_\nu(x)$$

$$- \frac{k}{k_J} \frac{\xi'_\nu(k_J b)}{\xi_\nu(k_J b)} [\psi_\nu(x) \cdot \xi_\nu(y) - \psi_\nu(y) \cdot \xi_\nu(x)]. \quad (2)$$

$$h = \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{n=\nu} \quad (3)$$

und ν ist zu bestimmen als Wurzel $n=\nu$, der Gleichung

$$f = \psi'_\nu(x) \xi'_\nu(y) - \psi'_\nu(y) \xi'_\nu(x)$$

$$- \frac{k}{k_J} \frac{\xi'_\nu(k_J b)}{\xi_\nu(k_J b)} [\psi'_\nu(x) \xi_\nu(y) - \psi_\nu(y) \xi'_\nu(x)] = 0, \quad (4)$$

die ihrerseits aus den Stetigkeitsbedingungen des Feldes bei $r=a$ und $r=b$ folgt.

Weiterhin ist $P_n(\Theta)$ die zonale Kugelfunktion n -ter Ordnung und

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(x) &= \left(\frac{\pi}{2} x \right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ \xi_n(x) &= \left(\frac{\pi}{2} x \right)^{1/2} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo J die BESSELSche Funktion erster Art und H die 2. HANKELsche Funktion bedeuten. Für beide Funktionen ψ und ξ gilt die Differentialgleichung

$$y''(x) + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] y = 0. \quad (6)$$

Die angewandte Näherung besteht darin, in dem Gebiet von $r=a$ bis $r=b$ die Funktionen ψ und ξ in eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln. Aus der Gleichung

$$y'' = - \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right) y$$

folgt

$$y''' = - \frac{2n(n+1)}{x^3} y - \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] y'$$

$$y'''' = \left[\frac{6n(n+1)}{x^4} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right]^2 \right] y - \frac{4n(n+1)}{x^3} y'$$

und

$$y(x + \Delta x)$$

$$= y + y' \cdot \Delta x + \frac{y''}{2} \Delta x^2 + \frac{y'''}{6} \Delta x^3 + \frac{y''''}{24} \Delta x^4,$$

$$x = k a, \quad \Delta x = k(b-a) = k H, \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{H}{a}.$$

führt man diese Entwicklungen in die obigen Gleichungen ein und benutzt die Beziehung

$$\psi_n(x) \xi'_n(x) - \xi_n(x) \cdot \psi'_n(x) = -j$$

so erhält man für

$$\left. \begin{aligned} & \psi'_n(x) \xi'_n(y) - \psi'_n(y) \cdot \xi'_n(x) \\ & = j \left\{ - \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] \Delta x - \frac{n(n+1)}{x^3} \Delta x^2 \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{n(n+1)}{x^4} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} \right] \Delta x^3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für eine vollkommen reflektierende Ionosphäre ($\kappa_J \rightarrow \infty$) ist dieser Ausdruck nach (4) gleich Null zu setzen und man erhält für $n = v_0$ in diesem Fall

$$1 - \frac{v_0(v_0+1)}{x^2} \left(1 - \frac{\Delta x}{x} \right) - \left[\frac{v_0(v_0+1)}{x^4} + \left(1 - \frac{v_0(v_0+1)}{x^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} \right] \Delta x^2 = 0.$$

In dieser Gleichung ist $\frac{\Delta x}{x}$ als sehr klein anzusehen. In erster Näherung ist

$$v_0(v_0+1) = \frac{x^2}{1 - \frac{\Delta x}{x}} \approx x^2.$$

Es ist also

$$v_0 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2},$$

wobei $x = ka = \frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{40\,000}{\lambda_{\text{km}}} \gg 1$ ist.

Es ist also $v_0 + \frac{1}{2} \approx x$, woraus folgt, daß wir es hier mit BESSELFunktionen sehr großer Ordnung und sehr hohen Arguments zu tun haben, wobei das Argument sich nur sehr wenig von der Ordnung abweicht.

Rechnet man in Gleichung 4 den zweiten Faktor aus, so entsteht

$$\begin{aligned} & \psi'_n(x) \xi_n(y) - \psi_n(y) \cdot \xi'_n(x) \\ & = j \left[1 - \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right) \cdot \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{n(n+1)}{x^3} \frac{\Delta x^3}{3} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

der bei den in Frage kommenden Wellenlängen,

$$\lambda > \frac{H}{3},$$

sehr nahe an $+j$ liegt. Es wird also die Gleichung 4 angenähert

$$f = j \Delta x \left[1 - \frac{v(v+1)}{x^2} \right] + \frac{k}{k_J} \frac{\xi'_n(k_J b)}{\xi_n(k_J b)} \cdot j = 0. \quad (9)$$

Nun ist

$$\frac{k^2}{k_J^2} = j \frac{\omega}{\mu \kappa c^2} \ll 1$$

und es ist $|k_J b| \gg ka$, so daß das 2. Glied der Gl. 9 nur eine Korrektur des 1. darstellt.

Nun ist

$$\frac{\xi'_n(z)}{\xi_n(z)} = -\frac{n}{z} + \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^{(2)}(z)}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z)}, \quad z = k_J b,$$

so daß aus Gl. (9)

$$1 - \frac{v(v+1)}{x^2} = \frac{b}{H} \frac{1}{z^2} \left[v - z \frac{H_{v-\frac{1}{2}}(z)}{H_{v+\frac{1}{2}}(z)} \right]$$

wird, was schon in [1] auf anderem Wege abgeleitet wurde.

Da das Argument der HANKEL-Funktion groß gegen deren Ordnung ist, gilt asymptotisch

$$\frac{H_n^{(2)}(\varrho)}{H_{n+1}^{(2)}(\varrho)} = -j \quad \varrho \gg n$$

und man erhält schließlich

$$\frac{v(v+1)}{x^2} = 1 - \frac{b}{H} \frac{1}{z^2} [v + jz] \approx 1 - \frac{b}{a} \frac{j}{z},$$

da $|v| \ll z$.

Für $z \rightarrow \infty$, $\kappa_J \rightarrow \infty$ ist $v_0(v_0+1) \approx x^2$. Führt man als Korrektur $v = v_0(1 + \delta)$ ein, so folgt mit

$$\delta \ll 1, \text{ und mit } k_J = \sqrt{\omega \mu \kappa} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (10)$$

$$v_0 \delta = \frac{1}{H} \frac{x^2}{1 + 2v_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \kappa}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

und da $2v_0 + 1 \approx 2x$ ist, wird

$$v_0 \delta = \frac{x}{2H} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \kappa}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad v_0 \approx x.$$

Wie erwartet, ist $\delta \ll 1$, aber $v_0 \delta$ kann erheblich werden. Der imaginäre Teil bestimmt die Dämpfung der Wellen (s. Gl. (15a)), der reelle Teil bedeutet eine unwesentliche Vergrößerung von v_0 . Mit $x = ka = \frac{\omega}{c} a$ wird der Dämpfungsfaktor β

$$\beta = Jm(v_0 \delta) = -\frac{a}{2Hc} \sqrt{\frac{\omega}{2\mu\kappa}}, \quad (11)$$

den schon WATSON in dieser Form abgeleitet hat.

Die Dämpfung wächst proportional $\sqrt{\omega}$ wie erwartet. Die Eindringtiefe in die Ionosphäre, der Abfall der Amplitude auf $1/e$, ist bei einem Leitwert von $10^{-4} \frac{S}{m}$ für $\lambda = 30 \text{ km}$, $f = 10000 \text{ sec}^{-1}$ gleich $\sim \frac{1}{2} \text{ km}$, bei einer Frequenz von 10 Per/sec $\lambda = 30000 \text{ km}$, $\sim 15 \text{ km}$. Im Ganzen ist also

$$v = v_0 + \frac{x}{2H} \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \kappa}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

zu setzen, bzw.

$$v + \frac{1}{2} = x + \frac{x}{2H} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \kappa}} e^{-j\frac{\pi}{4}}. \quad (12)$$

Führt man statt der Frequenz die Wellenlänge ein, so erhält man für den Dämpfungsfaktor

$$\beta = a \cdot \frac{1}{2H} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{c \mu \lambda \kappa}}$$

und mit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{\text{sec}}$, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ den Wert

$$\beta = a \cdot \frac{1}{4H} \frac{1}{\sqrt{30 \cdot \lambda \kappa}}.$$

Mißt man alle Längen in km, so entsteht

$$\beta = a_{\text{km}} \cdot \frac{1}{H_{\text{km}}} \frac{1}{400 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{km}} \kappa_{\text{S/m}}}}.$$

Setzt man z. B. $H = 70 \text{ km}$ und $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$, so erhält man den Wert

$$\beta = a_{\text{km}} \cdot \frac{0,00206}{\sqrt{\lambda_{\text{km}}}},$$

der zwischen den Werten von AUSTIN [5] (0,0015) und ESPENSCHIED, ANDERSON und BAILEY [6] (0,005) liegt.

Nachdem nun die Ordnung ν der ψ_ν und ξ_ν -Funktionen bestimmt ist und damit die Dämpfung bei der Ausbreitung, können jetzt die Funktionen g und h nach Gleichung 2 und 3 bestimmt werden. Dabei sollen in beiden Funktionen die kleinen Anteile der zweiten Glieder vernachlässigt werden, die an sich verschwinden, wenn der Leitwert der Ionosphäre unendlich hoch ist. Es entspricht das der in der Hochfrequenztechnik üblichen Methode, die Felder zunächst so zu berechnen, als seien die Wände z. B. eines Hohlraumes ∞ gut leitend, und die Dämpfung als nachträgliche Korrektur einzuführen. Wenn der Leitwert nicht zu klein ist, ist der begangene Fehler sehr klein und das ist hier der Fall.

Nach Gl. 3 ist $h = \frac{\partial f}{\partial n}$ und nach Gl. 7 folgt dann

$$h = j \frac{2\nu+1}{x^2} \Delta x \left\{ 1 - \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x^2}{x^2} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2} \right) \Delta x^2 \right\}.$$

Auch hier sind die 3 letzten Glieder in der Klammer sehr klein gegen 1 solange $\Delta x < 1$, so daß angenähert gilt

$$h \approx j \frac{2\nu+1}{x^2} \cdot \Delta x. \quad (13)$$

Da $\nu(\nu+1) \approx x^2$, ist sehr angenähert $h \approx j \frac{\Delta x}{x}$.

Für den Zähler von Π ist noch zu berechnen

$$g = \psi_\nu(x) \xi'_\nu(y) - \psi'_\nu(y) \xi_\nu(x) \approx -j \left[1 - \frac{1}{6x} \Delta x^3 \right]. \quad (14)$$

Für $H = b - a = 70$ km und $\lambda = 30$ km ist das zweite Glied in der Klammer $\sim 0,4$, und für größere λ kleiner.

Mit der Gl. (13) und (14) für g und h ergibt sich aus 1

$$\Pi(a, \Theta) = \frac{\pi}{b-a} \left(1 - \frac{\Delta x^3}{6x} \right) \frac{P_\nu(-\cos \Theta)}{\sin \nu \pi}.$$

Aus $\Pi(a, \Theta)$ bestimmt sich die radiale Feldstärke an der Erdoberfläche

$$E_r = - \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta} \right)$$

und nach der Differentialgleichung der Kugelfunktionen als

$$E_r = \frac{1}{a^2} \nu(\nu+1) \Pi = \pi \frac{k^2}{b-a} \left(1 - \frac{\Delta x^3}{6x} \right) \frac{P_\nu(-\cos \Theta)}{\sin \nu \pi}.$$

Schließlich wird dies ausgedrückt durch die Vollraumstrahlung des Dipols N

$$E_{rV/m} = \pi \cdot \frac{300}{H_m} \sqrt{N_{kW}} \cdot \left(1 - \frac{\Delta x^3}{6x} \right) \cdot \frac{P_\nu(-\cos \Theta)}{\sin \nu \pi}.$$

Nun gilt für die Kugelfunktion hoher Ordnung ($|\nu| \gg 1$) die Näherungsformel

$$P_\nu(\cos \Theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \sin \Theta}} \cos \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \Theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad (15)$$

die für $0 < \Theta < \pi$ gilt. Sie gilt auch für komplexe ν mit positiv reellem Teil. Aber während für ganzzahlige n ,

$$P_n(-\cos \Theta) = (-1)^n P_n(\cos \Theta) \quad \text{und}$$

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$$

gilt, wird die Kugelfunktion für nicht ganzzahligen Index n , die aus der hypergeometrischen Reihe abzuleiten ist, wenn sie im Nordpol ($\Theta = 0$) regulär ist, im

Südpol ($\Theta = \pi$) divergent und umgekehrt. Im Divergenzpunkt wird sie logarithmisch unendlich. In ihrem regulären Punkt strebt sie dem Wert 1 zu und geht in dessen Nähe in die BESSELSche Funktion J_0 über.

Daß die Potentialfunktion mit $P_\nu(-\cos \Theta)$ angesetzt ist, bedeutet, daß sie auf dem Strahl $\Theta = \pi$ regulär sein soll und den Wert 1 haben soll, während bei $\Theta = 0$, wo der Dipol liegt, der singuläre Punkt vorhanden sein soll, in dessen Nähe sie nach

$$\frac{\sin \nu \pi}{\pi} \log \Theta^2$$

verläuft [7].

Da ν eine große Zahl mit negativ imaginärem Anteil ist, folgt mit $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und indem in Gl. (15) statt Θ jetzt $(\pi - \Theta)$ geschrieben wird

$$P_\nu(-\cos \Theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \nu \sin \Theta}} \cdot e^{j \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) (\pi - \Theta) - \frac{\pi}{4} \right]},$$

wenn die Exponentialfunktion mit negativ reellem Teil als unbedeutend weggelassen wird.

Ganz analog mit der gleichen Näherung kann für

$$\sin \nu \pi = \frac{1}{2j} e^{j\nu\pi}$$

geschrieben werden.

Also ist

$$\frac{P_\nu(-\cos \Theta)}{\sin \nu \pi} \approx j \sqrt{\frac{2j}{\pi \nu \sin \Theta}} \cdot e^{-j \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \Theta}. \quad (15a)$$

Damit wird die radiale Feldstärke

$$E_{rV/m} = \frac{300\pi}{H} j \sqrt{\frac{2j}{\pi \nu \sin \Theta}} \sqrt{N_{kW}} \cdot \left(1 - \frac{\Delta x^3}{6x} \right) e^{-j \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \Theta}, \quad (16)$$

wobei

$$\nu + \frac{1}{2} \approx x + \frac{x}{2H} \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \epsilon}} e^{-j\pi/4} \quad (\text{s. Gl. (12)}).$$

Für das ν unter der Wurzel setzen wir in erster Näherung $\nu = x$ und erhalten dann für den Amplitudenfaktor

$$E_{rV/m} = \frac{300}{H_m} \sqrt{\frac{\lambda}{a \sin \Theta}} e^{j3/4\pi} \sqrt{N_{kW}} \left(1 - \frac{\Delta x^3}{6x} \right).$$

Wir erhalten also eine vom Sender ($\Theta = 0$) fortlaufende Welle. Ihre Winkelgeschwindigkeit ist

$$\frac{\Theta}{t} = \frac{\omega}{x} = \frac{c}{a}$$

und ihre Umlaufgeschwindigkeit $a \frac{\Theta}{t} = c$, gleich der Lichtgeschwindigkeit.

Versteht man unter N_H die Halbraumstrahlung in kW über ∞ gut leitender Erde und mißt man E_r in effektiven Werten, so ergibt sich mit Gl. (11) und mit $D = a\Theta$, die längs der Erdoberfläche gemessene Entfernung zwischen Sender und Empfänger,

$$E_{reffmV/m} = \frac{300}{H_{km}} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \sqrt{\frac{\lambda}{D}} \left(1 - \frac{\Delta x^3}{6x} \right) \times \sqrt{N_{HkW}} e^{-\frac{D_{km}}{H_{km} \cdot 400 \sqrt{3} \sqrt{\lambda_{km} \cdot s_{m}}}}} \quad (17)$$

wobei

$$1 - \frac{\Delta x^3}{6x} = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{H}{a} \right)^3 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2.$$

Setzt man probeweise $\lambda = 30 \text{ km}$ $\kappa = 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ und $H = 70 \text{ km}$, so folgt

$$E_{r \text{ eff}} = 14,3 \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \frac{1}{\sqrt{D_{\text{km}}}} \sqrt{N_{H \text{ kW}}} e^{-3,75 \cdot 10^{-4} \cdot D_{\text{km}} \frac{\text{mV}}{\text{m}}},$$

was größenordnungsmäßig mit der Näherungsformel von O. ZINKE [8] übereinstimmt. Für $\Theta = \frac{\pi}{2}$,

$D = 10000 \text{ km}$, $\frac{1}{4}$ des Erdumfangs ist

$$E_{r \text{ eff}} = 4,10 \cdot 10^{-3} \sqrt{N_{H \text{ kW}}} \cdot \frac{\text{mV}}{\text{m}} \quad (\text{mit Korrektionsglied})$$

Für größere λ gilt dementsprechend

$\lambda = 30 \text{ km}$	300 km	3000 km	30000 km
$\frac{E_{r \text{ eff}}}{\sqrt{N_{H \text{ km}}}} = 4,10 \cdot 10^{-3}$	0,284	2,14	8,23 $\frac{\text{mV}}{\text{m}}$
$6,73 \cdot 10^{-3}$ (ohne Korrektionsglied)			

Der Einfluß des Leitwerts κ auf die Ausbreitung für größere Entfernungen ist besonders bei kürzeren Wellenlängen sehr groß. So würde z. B. ein Leitwert von $4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ bei $\lambda = 30 \text{ km}$ und $D = 10000 \text{ km}$ eine Feldstärke von

$$E_{r \text{ eff}} = 26,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{N_{H \text{ kW}}} \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

ergeben, also das 6fache wie oben, während bei $\lambda = 30000 \text{ km}$ die Feldstärke sich nur um 6 % ändert.

O. ZINKE [8] hat ebenfalls eine einfache Näherungsformel für die Ausbreitung angegeben, mit der Annahme einer homogenen radialen Feldes zwischen Erde und Ionosphäre und einer Abschätzung des Bruchteiles der Energie, die vom Sender um die Erde gestrahlt wird. Er erhält eine Formel nach der die Feldstärke proportional ist zu

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \cdot \sqrt{N_H} e^{-0,003 \frac{D_{\text{km}}}{\lambda_{\text{km}}}}.$$

Verglichen mit dieser Formel zeigt sich als besonders charakteristisches Merkmal dieser sehr langen Wellen, daß die Wellenlänge nicht nur im Dämpfungsexponenten auftritt, sondern auch in dem Faktor vor dem Exponenten. Die Ausbreitung dieser sehr langen Wellen ist stark von der Wellenlänge abhängig, weil die Abstrahlung des Senders in die Hohlkugel mit wachsender Wellenlänge zunimmt und wird mit wachsender Wellenlänge immer besser, wenn die Strahlungsleistung N_H konstant gehalten wird. Da die Strahlungsleistung N_H proportional $\frac{J^2 h^2}{\lambda^2}$ ist, J Antennenstrom, h Antennenhöhe, bedeutet das bei großen Wellenlängen proportionale Zunahme von $J \cdot h$ mit λ . Daß im Dämpfungsexponenten $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ auftritt, hängt damit zusammen, daß ein konstanter Leitwert κ wie bei Metallen angenommen wurde. Nun ist bei der Ionosphäre bekanntlich

$$\kappa = \omega_0^2 \varepsilon_0 S^2 + \omega^2,$$

wo ω die aufgeprägte und S die „Stoßfrequenz“ der Elektronen mit umgebenden Gasmolekülen ist. Solange $\omega \ll S$ ist, ist κ nicht abhängig von der Frequenz, $\kappa = \omega_0^2 \varepsilon_0 / S$ was bisher angenommen wurde.

Sobald jedoch S und ω vergleichbar sind, wird κ frequenzabhängig und dann können im Dämpfungsexponenten auch andere Frequenzabhängigkeiten auftreten, wie sie z. B. von ZINKE diskutiert sind. Am Gegenpol des Senders laufen die Wellen wieder zusammen und die Feldstärke nimmt wegen des Gliedes $\sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}}$ für $\Theta > \frac{\pi}{2}$ wieder zu. Diese Überhöhung läßt sich mit Hilfe des Verlaufs der Kugelfunktion bestimmen. Nach der Näherungsformel (15) ist für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ für $n \gg 1$

$$P_v(-\cos \Theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \cos v \frac{\pi}{2},$$

und am Gegenpol, $\Theta \rightarrow 0$, strebt P_v gegen 1.

Also ist die Überhöhung am Gegenpol gegenüber dem Aquator gegeben durch

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{\pi v}{2 \cos v \frac{\pi}{2}}}$$

und mit

$$\cos v \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{2} e^{jv \frac{\pi}{2}}$$

ist der absolute Wert von \ddot{u} gleich

$$\sqrt{\frac{\pi k a}{2 e^{\beta \pi/2}}} \text{ wenn } \beta \text{ der negativ imaginäre Teil von } v$$

ist (s. Gl. 11). Da $k a = \frac{2 \pi a}{\lambda} = \frac{40000}{\lambda_{\text{km}}}$ erhält man

$$\ddot{u} = \pi \sqrt{\frac{a}{\lambda}} e^{-\beta \pi/2}.$$

Die Überhöhung ist also proportional der Wurzel aus der Frequenz und mit $a = 6370 \text{ km}$ für $\lambda = 30 \text{ km}$, abgesehen von der Dämpfung, gleich $\pi \sqrt{212} \approx 46$, wobei aber starke Dämpfung sie stark verringern kann, z. B. bei dem gerechneten Beispiel mit

$$\kappa = 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad H = 70 \text{ km} \quad \text{ist} \quad e^{-\beta \pi/2} \approx \frac{1}{40},$$

so daß die tatsächliche Überhöhung nur das 7,2 fache ist¹. Je größer die Wellenlänge ist desto geringer ist die Überhöhung.

Da die Halbraumstrahlung

$$N_H = 160 \pi^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 J^2$$

(h Antennenhöhe, J effektiver mittlerer Antennenstrom) ist, ergibt sich nach Einsetzen in die Gleichung

$$E_{r \text{ eff mV/m}} = \left. \begin{aligned} & \frac{120 \pi}{H_{\text{km}}} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \cdot (J h) \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\text{km}} D_{\text{km}}}} \\ & \times \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{b-a}{a} \right)^3 \left(\frac{2 \pi a}{\lambda} \right)^2 \right] e^{-\frac{D_{\text{km}}}{H_{\text{km}} 400 \sqrt[3]{\lambda_{\text{km}} \kappa \text{ S/m}}}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(h in km, wenn λ in km gemessen).

Bei gegebenen $(J h)$ ist E abhängig von der Wellenlänge in der Form

$$y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{\text{const}}{\sqrt{\lambda}}}$$

¹ Über das genauere Verhalten der Wellen am Gegenpol und die dort auftretenden Poissonschen Beugungseffekte s. J. GRATSIATOS. Ann. d. Phys. 86, 1041 (1928).

bzw.

$$y = \sqrt{f} e^{-a\sqrt{f}}.$$

Für $f = 0$ und $f \rightarrow \infty$ ist $E_r = 0$.Das Maximum von y liegt bei $f_m = \frac{1}{a^2}$ wo

$$a = \frac{D}{H \cdot 400 \cdot \sqrt{3} \sqrt{c} \sqrt{\kappa}} = \frac{D}{3,8 \cdot 10^5 \cdot H \sqrt{\kappa}}.$$

Damit ergibt sich mit $H = 70$ km, $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$ und $D = m \cdot 70$ km

$$f_m = \left(\frac{3800}{m} \right)^2$$

$m = 10$	20	30	40	50	100	200
$f_m = 1,44 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^4$	$1,64 \cdot 10^4$	9000	5800	1440	360 P/sek
$\lambda_m = 2,08$	8,35	18,7	33,7	51,8	208	835 km

Es gibt in diesem Fall für jede Entfernung eine günstigste Frequenz, die mit wachsendem Abstand immer kleiner wird.

Denkt man sich einen senkrecht verlaufenden Blitz als einen DIRAC-Impuls des Stromes, dessen Spektrum für alle Frequenzen die gleichen Amplituden hat, so gibt der Verlauf von y die spektrale Verteilung der ausgesendeten Frequenzen für diesen Fall. So ergibt sich aus der Gleichung für y

$\frac{f}{f_m} = 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2500}$	4	9	100
$\frac{y}{y_m} = 1$	$0,82$	$0,65$	$0,27$	$0,055$	$0,735$	$0,405$	$0,00114$

Es entsteht dann ein spektraler Verlauf nach Abb. 1

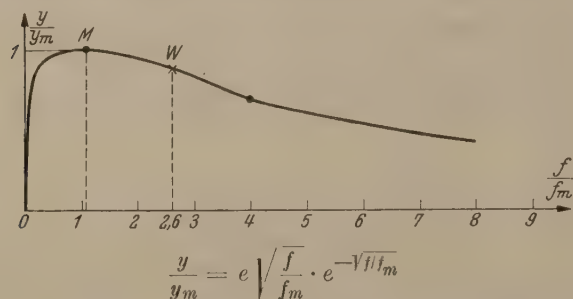


Abb. 1. Spektrum eines Blitzimpulses (als DIRAC-Impuls des Stromes aufgefaßt) in großer Entfernung von der Entladung.

bei dem $\frac{y}{y_m}$ von $\frac{f}{f_m} = 1$ bis $\frac{f}{f_m} = \frac{1}{100}$ von 1 auf 0,27 abfällt und dann bei geringen Frequenzen rasch auf Null fällt.

Das Maximum der Kurve würde sich mit wachsendem Abstand zu immer geringeren Frequenzen verschieben. Da in Wirklichkeit der Blitz eine erhebliche zeitliche Breite hat, würden der Abb. 1 gegenüber in Wahrheit die tiefen Frequenzen in ihren Amplituden erheblich bevorzugt sein gegenüber den höheren, was sich in der bekannten Tatsache ausdrückt, daß die Luftstörungen gerade bei tiefen Frequenzen sehr stark sind und im Bereich der hohen Frequenzen verschwinden¹.

Als Anwendung der Gl. 18 rechnet man z. B. für die Fernstrahlung eines Blitzes von der Höhe von

¹ Vgl. dazu H. NORINDER und W. STOFFREGEN. Arkiv För Matematik, Astronomi och Fysik. Bd. 33 A, 1946, Nr. 16. Nature and Variation of Atmospherics Caused by Lightning-Discharges.

5 km und einem Strom von $5 \cdot 10^4$ A während einer Zeitdauer von $T = 10^{-4}$ sec, der für die Frequenzen $< 10^4 \text{ sec}^{-1}$ als Spektralintensität die Stärke $\sim J \frac{T}{\pi}$ hat, wenn er als Rechteckimpuls aufgefaßt wird, für eine Entfernung $D = 10000$ km, die maximale Strahlung für $\lambda_{opt} = 435$ km. Für andere Wellenlängen ergibt sich:

$\lambda = 600$ km,	$f = 500$ Per/sec	$E_{r \text{ eff}} = 0,227 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$
$\lambda = 30000$ km,	$f = 10$ Per/sec	$E_{r \text{ eff}} = 0,067 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$
$\lambda = 60$ km,	$f = 5000$ Per/sec	$E_{r \text{ eff}} = 0,12 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$

Zur Bestimmung der Zeitfunktion aus der spektralen Verteilung muß nicht nur die Größe, sondern auch die Phase der spektralen Verteilung bekannt sein. Bestimmt man aus den Nahfeldern den Strom des Dipols, so ist das HERTZ'sche Potential

$$\Pi_0 = \frac{e^{-jkr}}{R} \quad \text{noch mit} \quad \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} J \cdot l$$

zu multiplizieren.

Mit Berücksichtigung dieses Faktors wird

$$E_{r \text{ max}} \frac{\text{mV}}{\text{m}} = 0,2 \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \frac{\sqrt{j\omega}}{H_{\text{km}} \sqrt{D_{\text{km}}}} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \left(1 - \frac{4x^3}{6x}\right) \cdot J_{A_m} \cdot h_{\text{km}} e^{-j\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Theta}$$

(h in Antennenhöhe in km) und es ist

$$-j\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Theta = -j\omega \frac{D}{c} - \frac{D}{2H} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\kappa S/m}} \cdot \sqrt{j\omega}$$

mit $\sqrt{\epsilon} = 2,98 \cdot 10^{-6}$.Für $\kappa = 10^{-4} \frac{S}{m}$ ist das zweite Glied gleich

$$\frac{D}{H} \cdot 1,49 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{j\omega}.$$

Das Spektrum von E hat mit $j\omega = p$ also die Form

$$\sqrt{p} \exp \left[-p \frac{D}{c} - \frac{D}{2H} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\kappa}} \cdot \sqrt{p} \right].$$

Der Faktor $e^{-p \frac{D}{c}}$ bedeutet lediglich, daß sich das Signal als Ganzes mit Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzt. Der zeitliche Verlauf des Signals nach dem Durchlaufen der Strecke D wird bestimmt aus

$$\sqrt{p} \exp \left(-\sqrt{\alpha p} \right), \quad \alpha = \frac{D^2}{4H^2} \cdot \frac{\epsilon}{\kappa},$$

und ist gegeben durch [9]:

$$y = \left(\frac{\alpha}{2t} - 1 \right) \frac{1}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp \left(-\frac{\alpha}{4t} \right), \quad t > 0,$$

wo t vom Moment des Eintreffens des Signals ab gerechnet wird. Mit

$$z = y \alpha^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{4x} \right), \quad x = \frac{t}{\alpha}$$

zeigt Abb. 2 den skizzierten Verlauf der Funktion z abhängig von x .

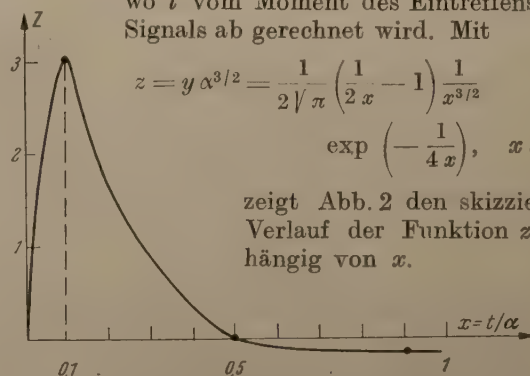


Abb. 2. Zeitlicher Verlauf des Signals einer Blitzentladung, wenn diese als DIRAC-Impuls des Stromes aufgefaßt wird.

Man sieht, wie der ursprüngliche DIRAC-Impuls sich verbreitert und seine Höhe abnimmt. Die Verbreiterung ist proportional D^2 , die Abnahme der Amplitude proportional $\frac{1}{D^3}$. Interessant ist das Durchgehen des Impulses durch Null für $t = \frac{\alpha}{2}$ und die darauf folgende lang ausgezogene negative Halbwelle, die auch experimentell beobachtet wird.

Da unser Frequenzspektrum nur für $\omega < 4\pi \frac{c}{H}$ gilt, gilt analog der zeitliche Verlauf erst bei solchen Entfernungen bzw. Zeiten, wo der wesentliche Teil des Spektrums in diesem Frequenzbereich liegt.

Um abzuschätzen, wie weit unsere Näherungen die radiale Verteilung der Felder durch die Funktionen $J_{\nu}(kr)$ und $\psi_{\nu}(kr)$ darstellen, prüfen wir sie am Verlauf der BESSEL-Funktion $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$. Die hierdurch bestimmten BESSEL-Funktionen $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ und $H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ beginnen auf der Erdoberfläche, $r = a$, mit den Werten $J_{ka}(ka)$ und $H_{ka}^{(2)}(ka)$ und von hier aus wächst das Argument. Man hat also die Näherungen für große Ordnungen und großes Argument zu benutzen, wobei sich das Argument nur sehr wenig von Größe der Ordnung unterscheidet. Bestimmt man nach den WATSONschen Näherungsformeln [10]

$$H_n^{1,2}(\varrho) = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{3}} e^{\pm j n (\text{tg } \alpha - \frac{1}{3} \text{tg}^3 \alpha - \alpha)} \pm j \pi/6 \cdot H_{1/3}^{1,2} \left(\frac{1}{3} n \text{tg}^3 \alpha \right).$$

$$n = \varrho \cdot \cos \alpha,$$

so ist

$$H_n^{1,2}(n) = \frac{2}{\Gamma^{2/3}} \cdot \left(\frac{2}{9n} \right)^{1/3} e^{\pm j \pi/3}$$

$$\frac{\partial H_n^{1,2}(\varrho)}{\partial \varrho \rightarrow n} = \frac{4}{2^{1/3} \cdot 3^{4/3} \cdot \Gamma^{4/3}} \cdot \frac{1}{n^{2/3}} e^{\pm j \pi/3}$$

so folgt daraus

$$J_n(n) = \frac{1}{\Gamma^{2/3}} \left(\frac{2}{9n} \right)^{1/3}$$

und

$$\frac{\partial J_n(\varrho)}{\partial \varrho \rightarrow n} = \frac{1}{\Gamma^{4/3}} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6n^2} \right)^{1/3}$$

und

$$\frac{J'_n(n)}{J_n(n)} = \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4n} \right)^{1/3}.$$

Nun ist

$$\psi_n(y) = \psi_n(x) + \psi'_n(x) \cdot \Delta x$$

$$+ \psi''_n(x) \frac{\Delta x^2}{2} + \psi'''_n(x) \frac{\Delta x^3}{6} + \psi''''_n(x) \frac{\Delta x^4}{24}$$

und es ist mit

$$\frac{n(n+1)}{x^2} \approx 1,$$

$$\psi''(x) = 0, \quad \psi'''(x) = -\frac{2}{x} \psi, \quad \psi''''(x) = \frac{6}{x^2} \psi - \frac{4}{x} \psi'$$

also

$$\psi_n(y) = \psi_n(x) + \psi'_n(x) \Delta x$$

$$- \frac{2}{x} \psi_n(x) \frac{\Delta x^3}{6} + \left(\frac{6}{x^2} \psi_n - \frac{4}{x} \psi'_n \right) \frac{\Delta x^4}{24}$$

und

$$\psi'_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \left[\frac{1}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(x) + J'_{n+\frac{1}{2}}(x) \right]$$

$$\frac{\psi'_n(x)}{\psi_n(x)} = \frac{1}{2x} + \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}(x)}{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}.$$

Damit wird

$$\frac{J_x(y)}{J_x(x)} = 1 + \left[\frac{1}{2x} + \frac{2}{3} \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{3}{4x} \right)^{1/3} \right] \Delta x - \frac{1}{3x} \Delta x^3$$

$$+ \left[\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{9x} \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{3}{4x} \right)^{1/3} \right] \Delta x^4.$$

Eine Nachrechnung zeigt, daß bei großem $x (=ka)$ nur die zweiten Glieder in den Klammern von Bedeutung sind. Also ist

$$\frac{J_x(y)}{J_x(x)} = 1 + \left. \begin{aligned} &\frac{2}{3} \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{3}{4x} \right)^{1/3} \Delta x - \frac{1}{3x} \Delta x^3 \\ &- \frac{1}{9x} \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{3}{4x} \right)^{1/3} \cdot \Delta x^4. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Eine Nachrechnung und der Vergleich mit dem bekannten Funktionsverlauf, Abb. 3 [11] (für große

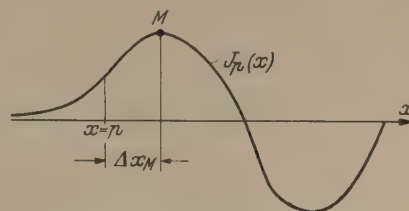


Abb. 3. BESSEL-Funktion hoher Ordnung und hohen Arguments ($y \approx x$).

Argumente und Ordnungen) zeigt gute Übereinstimmung, solange das letzte Glied klein gegen 1 ist.

Rechnet man das Maximum M von $J_x(y)$ aus, indem man Gl. (18) das letzte Glied vernachlässigt, so entsteht

$$\Delta x_M = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/6}} \cdot x^{1/3} = 0,925 \cdot \sqrt[3]{x}$$

und die Wellenlänge λ_M , die x_M entspricht

$$\lambda_M = 2\pi a \left(\frac{H}{a} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{\Gamma^{2/3}}{\Gamma^{4/3}} \right)^{3/4} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{1/4}$$

und es folgt mit $2\pi a = 40000$ km,

$$\lambda_M = 45200 \left(\frac{b-a}{a} \right)^{3/2}.$$

Ist $\frac{b-a}{a} = \frac{1}{100}$, so wird $\lambda_M = 45$ km.

Bis zum Wert Δx_M stimmt die Annäherung noch sehr gut. Bei einer Luftschichthöhe von ~ 60 km entspricht das einer Wellenlänge von ~ 45 km. Für geringere Ansprüche an Genauigkeit kann man Δx auch größer machen, etwa bis $\frac{3}{2} \Delta x_M$ wobei man etwa auf die Faustformel Mindestwellenlänge gleich halber Luftschichtdicke kommt. Für $\Delta x = 2 x_M$ treten aber schon erhebliche Fehler auf.

Aus dieser Tatsache, und der von WATSON allgemein festgestellten, daß v_0 niemals größer sein kann als kb , was sich nur um Prozente von ka unterscheidet, dürfen wir schließen, daß unsere Formeln nicht nur für $\Delta x \ll 1$ richtig sind, sondern etwa bis zu dem oben angegebenen Wellenbereich brauchbar sind.

Zusammenfassung.

Es wird für sehr lange elektrische Wellen aus den WATSONschen Gleichungen eine einfache Näherungsformel für die Ausbreitung von Dipolschwingungen rund um die Erde mit konzentrischer leitender Ionosphäre abgeleitet. Diese Formel wird dazu be-

nützt, um das Frequenzspektrum eines Blitzes abhängig vom Abstand D des Beobachtungsortes abzuleiten, indem dieser als ein DIRAC-Impuls des Stromes aufgefaßt wird. Die Wellenlänge λ_m für maximale Intensität verschiebt sich mit wachsendem Abstand proportional dem Quadrat dieses Abstandes zu längeren Wellen. Das Spektrum selbst verläuft ziemlich flach und fällt in der Gegend längster

Wellen ($\lambda \gg \lambda_m$) ziemlich steil ab proportional $\sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda}}$

und verläuft bei wesentlich kürzeren Wellen ($\lambda \ll \lambda_m$) nach dem Gesetz $e^{-\sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda}}}$.

Der zeitliche Verlauf des Signals ergibt sich aus dem FOURIER-Spektrum als proportional zu

$$\left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right), \quad x = \frac{t}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{D^2}{4H^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

Der Impuls wird proportional zu D^2 verbreitert und

seine Höhe nimmt proportional zu $\frac{1}{D^3}$ ab. Zur Zeit $t = \frac{\alpha}{2}$ geht der verbreiterte Impuls durch Null und es folgt dann eine kleine, negative, sehr langsam verschwindende Halbwelle.

Literatur. [1] SCHUMANN, W. O.: Z. f. Naturforschung **7a**, 150 (1952). — [2] SCHUMANN, W. O.: Z. f. Naturforschung **7a**, 250 (1952). — [3] WATSON, G. N.: Proc. Roy. Soc. **95**, Ser. A, 546 (1919). — [4] Washington-Bureau of Standards Bulletin Oct. 1911. — [5] AUSTIN, L. W.: Proc. Inst. Rad. Eng. **20**, 689 (1932). — [6] ESPENSCHIED, ANDERSON u. BAILEY: Proc. Inst. Rad. Eng. **14**, 7 (1926). — [7] SOMMERFELD, A.: Partielle Differentialgleichungen. S. 217 und S. 290. Leipzig 1947. — [8] ZINKE, O.: Frequenz **I**, 16 (1947). — [9] CAMPBELL, G. A. und R. M. FOSTER; Bell Telephone Syst. Monogr. **584**, 93 (1931). — [10] SOMMERFELD, A.: Partielle Differentialgleichungen. S. 121. Leipzig 1947. — [11] EMDE, F.: Funktione tafeln 2. Aufl., Fig. 124, S. 239 (1933).

Prof. Dr. WINFRIED OTTO SCHUMANN,
Elektrophysikalisches Institut der T. H. München.

Weitere Arbeiten für das MEISSNER-Festheft,

die leider in ihm nicht mehr Platz fanden und deshalb erst
in den nächsten Heften erscheinen können

Die Messung der dynamischen Festigkeit plastischer Werkstoffe

VON FRANZ EDER, Berlin

Einige spezielle Einschalt- und Ausgleichvorgänge in Supraleitern

VON LOTHAR A. KÖNIG und GERHARD U. SCHUBERT, Mainz

Laminare und turbulente stationäre Strömung von Luft und Kohlensäure in einem schwach konischen Rohr in der Nähe der kritischen REYNOLDSSchen Zahl

VON OTTO LAUER, Mering

Zur Absorption von Elektronen und Positronen

VON LOTHAR KOESTER, HEINZ MAIER-LEIBNITZ
und KURT SCHMEISER, Heidelberg

Zur Theorie der gemischten Halbleiter

VON OTTO MADELUNG und HANS WELKER, Erlangen

Ionosphären-Grenzfrequenz bei schiefem Einfall

VON HERMANN POEVERLEIN, München

Die Mehrfach-Funken-Kamera und ihre Anwendung in der technischen Physik

VON HUBERT SCHARDIN, Weil am Rhein

Verzeichnis der Originalarbeiten und der zusammenfassenden Berichte geordnet nach Sachgebieten.

1. Geschichtliches.

MEISSNER, W.: 50 Jahre Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München. 157.

2. Personalien.

JOOS, G.: W. MEISSNER 70 Jahre. 441.

ZENNECK, J.: H. G. MÖLLER 70 Jahre alt. 239.

3. Mechanik.

Messung mechanischer Größen.

BECKER, E. W. u. O. STEHL: Ein elektrostatisches Differentialmanometer mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-6}$ Torr/Skt. 20.

HÖPPLER, F.: Über neuere Messungen der Zähigkeit des Wassers. 297.

KUSS, E.: Hochdruckuntersuchungen I: Dichten und Schmelzkurven. 201.

— Hochdruckuntersuchungen II: Die Viskosität von komprimierten Gasen. 203.

SEDDIG, M. u. G. HAASE: Die Messung kleinster Drucke unterhalb 10^{-7} Torr mittels eines Adsorptionsmanometers. 105.

Elastizität und plastische Verformung.

DIEHL, J. u. A. KOCHENDÖRFER: Zugverformung an Einkristallen mit drehbaren Fassungen. 241.

Akustik und Ultraschall.

OERTEL, H.: Knallwellenoszillographie mittels Koronasonde. 177.

BITTEL, H.: Zur Kennzeichnung von Geräuschen und Rauschspannungen. 137.

LUTSCH, A.: Eine einfache Methode zur Messung der elastischen Konstanten mit Hilfe von Ultraschall-Impulsen. 166.

VOELZ, K.: Nachtrag zu der Arbeit „Die Dämpfung akustischer Resonatoren“. 18.

Strömungsphysik.

FUCKS, W.: Elektrisches Vorstromanemometer mit radioaktiver Vorionisierung. 51.

MAURER, E.: Eine neue theoretische und experimentelle Überprüfung des MEISSNERSchen Entropieprinzips in der Hydrodynamik an Hand der COUETTE-Strömung. 446.

Verschiedenes.

HERRMANN, R. u. H. SCHELLHORN: Ein neuer Zerstäuber für die Flammenphotometrie. 208.

4. Wärme.

Messung thermischer Größen.

CLUSIUS, K. u. L. SCHACHINGER: Ergebnisse der Tieftemperaturforschung. X. Atomwärme des Indiums zwischen 12° und 273° K. 442.

RÖSSLER, F.: Temperaturmessung nach der Methode der Linienumkehrung bei kurzzeitigen aperiodischen Vorgängen. 22.

Wärmeleitung, Konvektion.

FISCHER, J.: Die Wärmeabgabe von Drähten an ruhende Luft. Beitrag zur zahlenmäßigen Bestimmung. 90.

Verschiedenes.

EHRET, L., U. NEUBERT u. H. HANEMANN: Über den Einfluß starker Schallwellen auf fortschreitende Gasflammen in Rohren. 126.

GRASSMANN, P.: Berechnung der Temperaturverteilung beim autogenen Brennschneiden. 455.

HAUSEN, H.: Rektifikation idealer Dreistoff-Gemische. 41.

LAUE, M. v.: Thermodynamik und Supraleitung. 458.

LINDE, H.: Graphisches Verfahren zur Bestimmung der theoretischen Bodenzahl bei Waschvorgängen mit starken Temperaturveränderungen. 460.

NEUBERT, U.: Längsschwingungen von Flammen in geschlossenen langgestreckten Verbrennungsbomben. 121.

5. Elektrizität und Magnetismus.

Elektrische Meßtechnik.

KRÜGER, H.: Mittel zur Stabilisierung von Photozellenkompensatoren und zur Verringerung der Anzeigeverzögerung bei trägen Meßfühlern. 173.

LAPORTE, H.: Kurze Notiz über ein piezoelektrisches Vibrationsgalvanometer. 16.

LÜCKING, H. W.: Ein in der Nullage mechanisch astasierbares Blättchenelektrometer. 169.

MEISSNER, H.: Ein schnellschwingender Galvanometereinsatz zum Siemensschen 3-Schleifenzillographen. 89.

SCHULZE, A. u. H. EICKE: Über Goldchrom-Normalwiderstände. 321.

TISCHER, F.: Schraubenförmige Meßleitung für Mikrowellen. 345.

Dielektrika, Isolatoren.

ECKART, G.: Zur Theorie der Dielektrizitätskonstante von Stoffmischungen. 134.

GLASER, G.: Über die elektrische Leitfähigkeit und Durchschlagfestigkeit dünner Glasfolien. 12.

MÖLTGEN, G.: Dielektrische Untersuchungen an Ferriten. 216.

Elektrizitätsleitung.

EINSELE, TH.: Über die Trägheit des Flußleitwerts von Germaniumdioden. 183.

MEISSNER, H.: Temperungsbedingungen für Wismut. 59.

Gasentladung.

CHRISTIANSEN, J.: Selbstlöschende Parallelplattendampfmesszähler bei Spannungen unterhalb der statischen Durchschlagsfeldstärke. 326.

KNOOP, E.: Zündvorgang, Entladungsverlauf und Entionisierung in Gastrioden. 386.

SCHNEIDER, F.: Zur Deutung der extrem niedrigen Brennschmelze einer Hochfrequenzentladung zwischen ebenen Platten. 324.

Verstärkertechnik.

BENEKING, H.: Betrachtungen und Versuche zum dynamischen Sekundärelektronenvervielfacher. 258.

CAPPELLER, U.: Die Wiedergabe von Spannungsimpulsen durch einen Proportionalverstärker. 330.

Höchstfrequenzen.

- GEBAUER, R. u. H. KOSMAHL: Aufbau, Eigenschaften und Wirkungsweise der Triftröhren (Klystrons) und Probleme bei ihrer Anwendung. 267.
- GUNDLACH, F. W.: Erzeugung und Verstärkung von Schwingungen im Höchstfrequenzgebiet. 147.

Elektromagnetische Wellen.

- MÜLLER, R.: Eine strenge Formulierung des Problems der Beugung an Schlitzblenden in Rohren mit rechteckigem Querschnitt. 424.
- MÜLLER, R. u. E. RUCH: Die elektromagnetischen Eigenschwingungen in einem Quader bei endlicher Leitfähigkeit der Hülle. 254.
- SCHUMANN, W. O.: Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen über die Erde und das Frequenzspektrum des Blitzes. 474.
- WOLTER, H.: Strahlungsdämpfung, Widerstände und Richtdiagramme von Überbreitbandantennen. 60.

Ionosphärenphysik.

- GERSON, N. C.: Bewegungen der abnormalen E-Schicht der Ionosphäre. 81.

Magnetismus.

- BAILITIS, E., C. HAGEN und H. H. RUST: Untersuchungen über den Ablauf von Teilvorgängen bei der Magnetostriktion. 284.
- FELDTKELLER, R.: Die Formänderung der Hystereseschleife von Transformatorenblech beim magnetischen Kriechen. 281.
- FELDTKELLER, R. u. O. KOLB: Die komplexe Permeabilität eines hochpermeablen Ferritkernes. 448.
- KORNETZKI, M.: Eine Beziehung zwischen Hysteresebiwert und Permeabilität. 343.
- BRACKMANH, J., J. FREY u. W. GIESEKE: Meßergebnisse an hochpermeablen Ferritkernen. 371.
- OCHSENFELD, R.: Der Antiferromagnetismus. 350.

Elektronen- und Ionenoptik.

- PLOCKE, M.: Elementare Theorie der Elektronenstrahlerzeugung mit Triodensystemen. II. Stromstärke und Struktur des Elektronenbündels. 1.
- WENZL, F.: Ionen und Elektronen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeiten im Vakuum. 94.

6. Optik.*Spektroskopie.*

- CALKER, J. VAN u. W. MAASS: Elektrische und spektroskopische Messungen an Niederspannungsfunken. 161.
- u. R. WIENECKE: Über die Bedeutung des Zn als dritter Legierungspartner bei spektroskopischen Untersuchungen am System Al-Mg. 210.
- EULER, J.: Über die spektroskopische Untersuchung von Kondensatorstößen in Hg-Höchst-Entladungen. 82.
- LIPPERT, E.: Apparative Fortschritte in der Infrarot-Spektroskopie I. 390.
- Apparative Fortschritte in der Infrarot-Spektroskopie II. 434.

- LÖBELL, D.: Die Verwendung der sogenannten Voltaluminenz für spektralanalytische Zwecke. 462.

Optische Prüfgeräte.

- LANDWEHR, R.: Formprüfung mit Mikrointerferenzen. Ein neues Oberflächeninterferometer. 377.

Photographie.

- EGGERT, J.: Bemerkungen zum Schwarzschildeffekt. 445.

Kinematographie.

- SCHARDIN, H. u. E. FÜNFER: Grundlagen der Funkenkinematographie. 185.
- — Grundlagen der Funkenkinematographie. Fortsetzung aus Heft 5 und Schluß. 224.

Fernsehen.

- KAROLUS, A.: Die Entwicklung der speichernden Fernseh-Aufnahmeröhre. 71.
- Farbfernsehen. 300.

Physiologische Optik.

- SCHIESS, J.: Vergleich von flimmer- und gleichheitsphotometrischen Messungen an Spektrallichtern bei Helladaptation. 374.

Röntgenstrahlen.

- BREITLING, G.: Über die Wellenlängenabhängigkeit der Fluoreszenz organischer Leuchtstoffe im Röntgengebiet. 401.
- GEROLD, V.: Röntgenographische Dickenmessung von galvanischen Schichten mit Hilfe eines Zählrohr-Interferenzgoniometers. 247.
- SCHALL, R.: Röntgenblitzuntersuchungen bei nichtidealen Detonationswellen. 291.
- ZIELER, E.: Messung der Halbwertschicht bei ölsolierten Röntgenröhren. 293.

7. Aufbau der Materie.*Struktur des festen Körpers.*

- DIEHL, J. u. A. KOCHENDÖRFER: Zugverformung an Einkristallen mit drehbaren Fassungen. 241.
- KUHN, W.: Einfluß elektrischer Ladungen auf das Verhalten von Hochpolymeren. 108.
- RAETHER, H.: Untersuchung des Ordnungszustandes der Gold-Kupfer-Legierung AuCu₃ mittels Elektroneninterferenzen. 53.
- STUART, H. A.: Form und Beweglichkeit von Fadenmolekülen und ihre Bedeutung für die Ordnungszustände in hochpolymeren Körpern. 29.
- WILSDORF, H. u. D. KUHLMANN-WILSDORF: Elektronenmikroskopische Untersuchung der Oberfläche von gedehntem Reinstaluminium I. 361.
- — Elektronenmikroskopische Untersuchung der Oberfläche von gedehntem Reinstaluminium II. 403.
- — Elektronenmikroskopische Untersuchung der Oberfläche von gedehntem Reinstaluminium III. 418.

Autorenverzeichnis.

(A) bedeutet Originalarbeit, (Ber) zusammenfassender Bericht, (Pers) Personalien.

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| Bailitis, E. 284 (A). | Hagen, C. 284 (A). | Meißner, W. 157 (Ber). |
| Becker, E. W. 20 (A). | Hahnemann, H. 126 (A). | Möltgen, G. 216 (A). |
| Beneking, H. 258 (A). | Hausen, H. 41 (A). | Müller, R. 254 (A). |
| Bittel, H. 137 (A). | Herrmann, R. 208 (A). | Neubert, U. 121 (A). |
| Brackmann, J. 371 (A). | Höppler, F. (A) 297. | Neubert, U. 126 (A). |
| Breitling, G. 401 (A). | Joos, G. 441 (Pers). | Ochsenfeld, R. 350 (Ber). |
| Calker, J. van 161 (A). | Karolus, A. 71 (Ber). | Oertel, H. 177 (A). |
| Calker, J. van 210 (A). | Karolus, A. 300 (Ber). | Plocke, M. 1 (A). |
| Cappeller, U. 330 (A). | Knoop, E. 386 (A). | Raether, H. 53 (A). |
| Christiansen, J. 326 (A). | Kochendörfer, A. 241 (A). | Rössler, F. 22 (A). |
| Clusius, K. 442 (A). | Kolb, O. 448 (A). | Ruch, E. 254 (A). |
| Diehl, J. 241 (A). | Kornetzki, M. 343 (A). | Rust, H. H. 284 (A). |
| Eckart, G. 134 (A). | Kornetzki, M. 371 (A). | Schachinger, L. 442 (A). |
| Eggert, J. 445 (A). | Kosmahl, H. 267 (Ber). | Schall, R. 291 (A). |
| Ehret, L. 126 (A). | Krüger, H. 173 (A). | Schardin, H. 185 (Ber). |
| Eicke, H. 321 (A). | Kuhlmann-Wilsdorf, D. 361 (A). | Schardin, H. 224 (Ber). |
| Einsele, Th. 183 (A). | Kuhlmann-Wilsdorf, D. 409 (A). | Schellhorn, H. 208 (A). |
| Euler, J. 82 (A). | Kuhlmann-Wilsdorf, D. 418 (A). | Schiess, J. 374 (A). |
| Feldtkeller, R. 281 (A). | Kuhn, W. 108 (Ber). | Schneider, F. 324 (A). |
| Feldtkeller, R. 448 (A). | Kuss, E. 201 (A). | Schulze, A. 321 (A). |
| Fischer, J. 90 (A). | Kuss, E. 203 (A). | Schumann, W. O. 474 (A). |
| Föppl, L. 452 (A). | Landwehr, R. 377 (A). | Seddig, M. 105 (A). |
| Frey, J. 371 (A). | Laporte, H. 16 (A). | Stehl, O. 20 (A). |
| Fucks, W. 51 (A). | Laue v., M. 458 (A). | Stuart, H. A. 29 (Ber). |
| Fünfer, E. 185 (Ber). | Linde, H. 460 (A). | Tischer, F. 345 (A). |
| Fünfer, E. 224 (Ber). | Lippert, E. 390 (Ber). | Voelz, K. 18 (A). |
| Gebauer, R. 267 (Ber). | Lippert, E. 434 (Ber). | Wenzl, F. 94 (A). |
| Gerold, V. 247 (A). | Löbell, D. 462 (A). | Wienecke, R. 210 (A). |
| Gerson, N. C. 81 (A). | Lücking, H. W. 169 (A). | Wilsdorf, H. 361 (A). |
| Gieseke, W. 371 (A). | Lutsch, A. 166 (A). | Wilsdorf, H. 409 (A). |
| Glaser, G. 12 (A). | Maass, W. 161 (A). | Wilsdorf, H. 418 (A). |
| Grassmann, P. 452 (A). | Maurer, E. 466 (A). | Wolter, H. 60 (A). |
| Gundlach, F. W. 147 (Ber). | Meißner, H. 59 (A). | Zenneck, J. 239 (Pers). |
| Haase, G. 105 (A). | Meißner, H. 89 (A). | Zieler, E. 293 (A). |

Verzeichnis der Buchbesprechungen.

(Die Namen der Autoren sind in Klammern gesetzt.)

- ARENS, H.: Farbenmetrik (*Joos*). S. 79.
 BAUER, H. A.: Grundlagen der Atomphysik (*Hellner*). S. 120.
 BRODA, E.: Advances in Radiochemistry (*Joos*). S. 40.
 BRÜGEL, W.: Physik und Technik der Ultrarotstrahlung (*Wintergerst*). S. 120.
 BUCHWALD, E.: Einführung in die Kristalloptik (*Joos*). S. 240.
 BÜCKNER, H.: Die praktische Behandlung von Integralgleichungen (*Sauer*). S. 399.
 BURSTYN, W.: Elektrische Kontakte und Schaltvorgänge (*Meißner, W.*). S. 120.
 CAMMERER, J. S.: Wärme- und Kälteschutz in der Industrie (*Meißner, W.*). S. 119.
 CANDLER, C.: Modern Interferometers (*Joos*). S. 40.
 COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (*Sauer*). S. 39.
 DÄNZER, H.: Einführung in die theoretische Kernphysik (*Schubert*). S. 39.
 DAUDT, W.: Einführung in die Lehre von den komplexen Zahlen und Zeigern (*Vafiadis*). S. 280.
 DEN HARTOG, J. P.: Mechanische Schwingungen (*Joos*). S. 240.
 DUSHMAH, S.: Fundamentals of Atomic Physics (*Bauer*). S. 200.
 EBERT, H.: Physikalisches Taschenbuch (*Joos*). S. 40.
 FELDTKELLER, R.: Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik (*Buchholz*). S. 38.
 Fester Zustand der hochpolymeren Substanzen. Sonderausgabe der Kolloid-Zeitschrift. Band 120 (*Baldus*). S. 79.
 FISCHER, F. A.: Grundzüge der Elektroakustik (*Wintergerst*). S. 38.
 FLÜGGE, S. unter Mitarbeit von H. MARSCHALL: Rechenmethoden der Quantenmechanik (*Schubert*). S. 37.
 FRAUENFELDER, P. und P. HÜBNER: Einführung in die Physik, Band I Mechanik, Hydromechanik, Thermodynamik (*Joos*). S. 40.
 GMELINS Handbuch der anorganischen Chemie: Selen (*Meißner, W.*). S. 78.
 GMELINS Handbuch der anorganischen Chemie: Titan (*Meißner, W.*). S. 120.
 GMELINS Handbuch der anorganischen Chemie: Arsen, Magnesium, Sauerstoff (*Meißner, W.*). S. 399.
 GÖRLICH, P.: Die Photozellen (*Joos*). S. 79.
 GRIMSEHL-SCHALLREUTER-SEELIGER: Lehrbuch der Physik Band II (*Joos*). S. 79.
 HAMEL, B.: Integralgleichungen, Einführung in Lehre und Gebrauch (*Löbell*). S. 160.
 HANLE, W.: Künstliche Radioaktivität (*Joos*). S. 400.
 HARTING, H.: Photographische Optik (*Joos*). S. 280.
 HAUSEN, H.: Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom (*Schmidt*). S. 239.
 HECHT, H.: Die elektroakustischen Wandler (*Näbauer*). S. 240.
 HECHT, H.: Schaltschemata und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde (*Näbauer*). S. 80.
 HEYBOER, J. P.: Senderöhren (*Meinke*). S. 40.
 HUND, F.: Einführung in die theoretische Physik (*Schubert*). S. 80.
 JEBSEN-MARWEDEL, H.: Die Glasschmelze mikroskopisch gesehen (*Joos*). S. 160.
 Jenaer Jahrbuch 1951 (*Joos*). S. 240.
 JETTER, U. u. Mitarbeit von W. HANLE: Atomwaffen (*Joos*). S. 400.
 JUNG, K.: Angewandte Geophysik (*Bartels*). S. 159.
 KAFKA, H.: Einführung in die Verstärkertechnik (*Scheuber*). S. 200.
 KEPP, R. K.: Grundlagen der Strahlentherapie (*Glocker*). S. 399.
 KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre, I. Band: Einfache Schwingung und Schwingungsmeßgeräte (*Meißner, W.*). S. 80.
 KNOFF, I.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (*Löbell*). S. 160.
 KRATZ, L.: Die Glaselektrode und ihre Anwendungen (*Knorr*). S. 37.
 KRÖNERT, J.: Physikalische Meßmethoden (*Meißner, W.*). S. 398.
 KÜPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik (*Schumann*). S. 200.
 LAUE, M. v.: Die Relativitätstheorie (*Müller*). S. 240.
 Lexikon der Physik. Herausgegeben von H. FRANKE. Band I A—K (*Meißner, W.*). S. 160.
 LINDORF, H.: Technische Temperaturmessungen (*Meißner, W.*). S. 398.
 LÖSCH, F. und F. SCHOBLIK: Die Fakultät (Gamma-Funktion) und verwandte Funktionen (*Meixner*). S. 200.
 LOHR, E.: Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker (*Hellner*). S. 199.
 LOHR, E.: Mechanik der Festkörper (*Stefaniak*). S. 440.
 MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers (*Bechert*). S. 320.
 MASING, G.: Grundlagen der Metallkunde in anschaulicher Darstellung (*Näbauer*). S. 80.
 MATARÉ, H. F.: Empfangsprobleme im Ultrahochfrequenzgebiet (*Meinke*). S. 199.
 MEINKE, H.: Theorie der Hochfrequenzschaltungen (*Gundlach*). S. 200.
 MÜNSTER, A.: Riesenmoleküle (*Joos*). S. 400.
 NEISS, F.: Analytische Geometrie (*Löbell*). S. 159.
 NESSELMANN, K.: Die Grundlagen der angewandten Thermodynamik (*Hausen*). S. 399.
 PFLIER, P. M.: Elektrische Meßgeräte und Meßverfahren (*Jaeger*). S. 80.
 Physikalisches Wörterbuch, herausgegeben von W. WESTPHAL (*Waidelich*). S. 360.
 PISCHINGER, A.: Technische Thermodynamik. Einführung in Grundlagen und Anwendung (*Meißner, W.*). S. 78.
 PÖSCHL, TH.: Lehrbuch der technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker (*Stefaniak*). S. 280.
 PRINGSHEIM, P. und M. VOGEL: Lumineszenz von Flüssigkeiten und festen Körpern (*Joos*). S. 38.
 PRÖLL, A.: Grundlagen der Äromechanik und Flugmechanik (*Kaufmann*). S. 399.
 RUMMEL, TH.: Hochspannungs-Entladungs-Chemie und ihre industrielle Anwendung (*Knorr*). S. 39.
 SANDEN, H. v.: Praktische Mathematik (*Meißner, H.*). S. 160.
 SAUER, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik (*Kaufmann*). S. 119.
 SAUER, R.: Ecoulements des fluides compressibles (*Kaufmann*). S. 119.
 SEITH, W. und K. RUTHARDT: Anleitungen für die chemische Laboratoriumspraxis: Chemische Spektralanalyse (*Schöntag*). S. 78.
 SISCO, F. T. und H. SIEGEL: Das Elektrostahlverfahren (*Wintergerst*). S. 120.
 SCHAEFER, CL.: Einführung in die theoretische Physik (*Meißner, W.*). S. 320.
 SCHAEFER, KL.: Physikalische Chemie (*Scheibe*). S. 398.
 SCHLICHTING, H.: Grenzschichttheorie (*Meißner, W.*). S. 78.
 SCHMEIDLER, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik (*Schubert*). S. 37.
 SCHNEIDERHÖHN, H.: Einführung in die Kristallographie (*Steinmetz*). S. 199.
 SCHWANK, F.: Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis (*Näbauer*). S. 80.
 SNEDDON, I. N.: Fourier Transforms (*Schubert*). S. 398.
 STRECKER, F.: Praktische Stabilitätsprüfung mittels Ortskurven und numerischen Verfahren (*Vafiadis*). S. 360.
 STUART, H. A.: Die Physik der Hochpolymeren (*Joos*). S. 400.
 WAGNER, K.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation (*Schubert*). S. 159.
 WAWILOW, S. J.: Isaac Newton (*Meißner, W.*). S. 79.
 WINKLER, H. G. F.: Struktur und Eigenschaften der Krystalle (*Steinmetz*). S. 39.